

Capitolo 5

Analisi dell'errore

5.1 Introduzione

Le principali cause che producono un errore nella stima delle coordinate spaziali del punto di lavoro sono essenzialmente due:

- Errore nella localizzazione spaziale del piano d'ombra
- Errore nell'individuazione del tempo d'ombra, che porta ad un errore nella localizzazione temporale del piano d'ombra.

Il primo errore dipende dall'incertezza nella localizzazione spaziale, per ogni istante di tempo, delle rette $\lambda_h(t)$ e $\lambda_v(t)$. A partire da queste, usando le (3.3), (3.4) e (3.5), si ricava la posizione del piano d'ombra $\Pi_s(t)$ ovvero il suo vettore rappresentativo $\bar{\mathbf{w}}_s(t)$. Le coordinate di tale vettore saranno pertanto anch'esse affette da incertezza. Ovviamente nel caso fosse nota la sorgente luminosa non ci sarebbe bisogno anche della linea $\lambda_h(t)$, semplificando non poco l'analisi. In tutti i casi, il contributo di quest'errore sull'intera ricostruzione dell'oggetto non è molto significativo, soprattutto se confrontato con quello prodotto dall'altra sorgente d'errore. Per tale motivo verrà posta in seguito l'attenzione solo sull'errore nella localizzazione temporale del piano ombra.

5.2 Analisi dell'errore nell'individuazione del piano ombra

Ogni pixel $\underline{x}_c=(x_c,y_c)$ dell'immagine vede il bordo dell'ombra passare in corrispondenza del tempo d'ombra t_s . Tale tempo e' calcolabile attraverso la localizzazione temporale presentata nel paragrafo 2.4. Ovviamente l'individuazione di t_s tramite la (2.2) e la (2.3) e' soggetta ad incertezza la quale si riflette sulla stima del piano d'ombra $\Pi(t_s)$.

Lo scopo dell'analisi proposta in questo paragrafo e' capire in che termini l'incertezza nella valutazione del tempo d'ombra pesa sulla ricostruzione finale e quantificare tale errore.

Con riferimento ad un determinato pixel \underline{x}_c , si supponga che il relativo tempo d'ombra sia $t_s(\underline{x}_c)$. Se si assume di commettere un errore additivo $\delta t_s(\underline{x}_c)$ nella valutazione di $t_s(\underline{x}_c)$, si ottiene la seguente quantita' (stima del tempo d'ombra):

$$t_s^*(\underline{x}_c) = t_s(\underline{x}_c) + \delta t_s(\underline{x}_c)$$

Questo provoca un errata assegnazione del piano d'ombra $\Pi(t_s(\underline{x}_c)+\delta t_s(\underline{x}_c))$ al pixel \underline{x}_c . In maniera equivalente e' possibile pensare che il piano d'ombra $\Pi(t_s(\underline{x}_c))$ sia stato assegnato all'errato pixel \underline{x}_c nell'immagine. Il fatto di poter porre l'attenzione sul pixel invece che sul piano ombra semplifica l'intera analisi.

Si definisca $\bar{v}_c = [v_{xc} \ v_{yc}]^T$ il vettore di velocita' dell'ombra associato al pixel \underline{x}_c . Tale vettore sara' ortogonale al bordo dell'ombra in corrispondenza di \underline{x}_c . Pertanto il pixel piu' vicino a \underline{x}_c oscurato dal piano d'ombra $\Pi(t_s(\underline{x}_c)+\delta t_s(\underline{x}_c))$ e' :

$$\underline{x}_c^* = \underline{x}_c + \delta t_s(\underline{x}_c) \bar{v}_c \quad (5.1)$$

In definitiva si determina un'incertezza sulla posizione del pixel di lavoro pari a:

$$\delta \underline{x}_c = \underline{x}_c + \delta t_s(\underline{x}_c) \bar{v}_c - \underline{x}_c^* = \delta t_s(\underline{x}_c) \bar{v}_c \quad (5.2)$$

che puo' essere interpretata come il *rumore additivo equivalente* attribuito alla locazione \underline{x}_c , prima dell'operazione di triangolazione.

Si osservi che il rumore additivo equivalente e' legato alla velocita' con cui si muove l'ombra. Invero, anche assumendo l'errore $\delta t_s(\underline{x}_c)$ identico per ciascun pixel dell'immagine, altrettanto non si puo' fare per la quantita' $\delta \underline{x}_c$, sia in termini di direzione che intensita'. L'ombra sicuramente passera' a velocita' differenti in corrispondenza dei vari pixel dell'immagine. Cio'accade sia perche' l'operatore puo' spostare la bacchetta con velocita' variabile nel tempo, sia perche' puo' cambiare l'orientazione relativa della superficie dell'oggetto. Pertanto, per la (5.2), pixel che vedono un passaggio piu' rapido dell'ombra corrisponderanno ad un piu' elevato rumore additivo equivalente $\delta \underline{x}_c$.

Prima di proseguire l'analisi e' necessario introdurre la seguente approssimazione. In pratica si assume che l'ombra che compare nell'immagine sia perfettamente verticale e che si muova lungo la direzione orizzontale. In tal modo il vettore \bar{v}_c e' anche esso orientato lungo la direzione orizzontale (in altri termini $v_{xc} \gg v_{yc}$). Cio' equivale a dire che solo la prima coordinata di \underline{x}_c e' affetta dal rumore:

$$\delta \underline{x}_c = \delta t_s(\underline{x}_c) v_{xc}$$

Si indichi ora con σ_c^2 la varianza del rumore associato alla luminosit  del singolo pixel (cfr. § 2.3). Ebbene e' possibile dimostrare (cfr. Bouguet, Perona [1]) che la varianza \mathbf{s}_{xc}^2 associata a x_c e' ottenibile come:

$$\mathbf{s}_{xc}^2 = \frac{\mathbf{s}_c^2}{f_o^2 I_x^2(x_c, y_c)} \quad (5.3)$$

dove:

$$I_x(x_c, y_c) = \left. \frac{\partial I(\bar{x}, t)}{\partial x} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_c, t=t_s} \quad (5.4)$$

con f_o pari alla lunghezza focale della telecamera espressa in pixel. La funzione $I_x(x_c, y_c)$ rappresenta il gradiente della luminosit  $I(x_c, y_c, t)$ (relativa al singolo pixel \underline{x}_c) valutato nell'istante di tempo $t_s(\underline{x}_c)$ (cfr. figura 5.1).

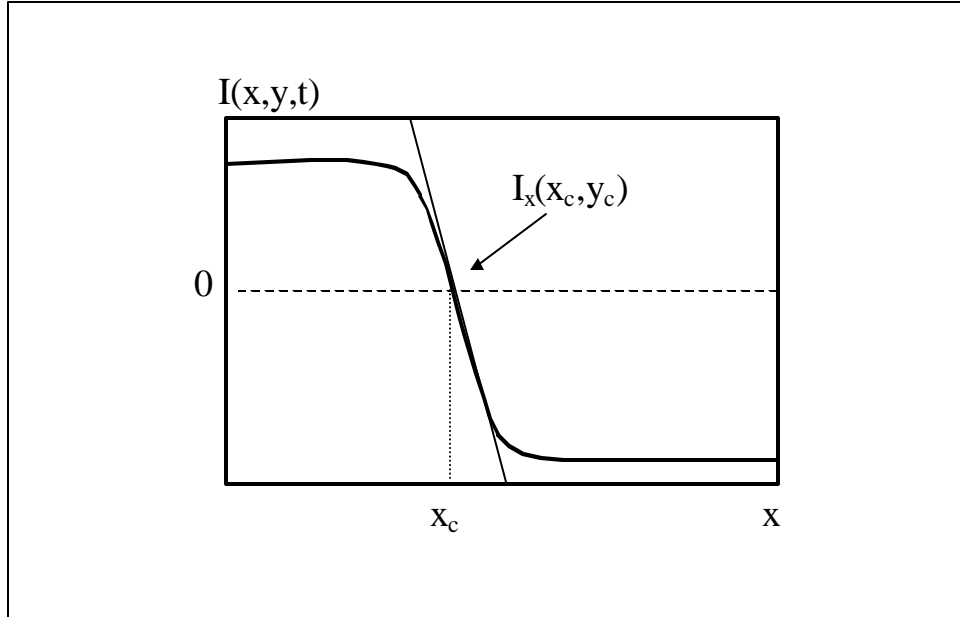


Figura 5.1: Andamento spaziale della luminosita' $I(x,y,t)$ lungo il pixel \underline{x}_c all'istante $t_s(\underline{x}_c)$. Il gradiente $I_x(x_c, y_c)$ e' la derivata della luminosita' $I(x,y,t)$ rispetto ad x valutata nel tempo d'ombra $t_s(\underline{x}_c)$ e per il pixel \underline{x}_c .

Il punto \bar{x}_c sul piano immagine nel riferimento della telecamera corrispondente al pixel \underline{x}_c si ottiene adoperando le (4.6) e inserendo il fattore di distorsione radiale k (cfr. § 4.2, 4.3). E' possibile semplificare l'analisi, senza togliere alcuna validita' ai risultati che si otterranno, assumendo che le coordinate del vettore \bar{x}_c siano esprimibili direttamente come:

$$\bar{x}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto, dalle considerazioni di cui sopra, si puo' concludere che solo la prima coordinata di \bar{x}_c porta un contributo di rumore.

Dalla 5.3 si possono trarre alcune interessanti conclusioni. Essendo \mathbf{s}_{xc}^2 inversamente proporzionale al gradiente $I_x(x_c, y_c)$, l'incertezza diminuisce se l'ombra presenta un bordo piu' tagliente (cioe' con una transizione scuro-chiaro molto netta). Tale proprieta' verra' richiamata nel paragrafo 6.10. Se si assume inoltre $I_x(x,y)$ costante per ogni pixel, la varianza puo' essere considerata uniforme su tutta l'immagine. Tale

conclusione non sempre si puo' ritenere accettabile. Infatti puo' capitare che possa variare l'ampiezza della zona di transizione del bordo dell'ombra nel corso della scansione, rendendo la quantita' $I_x(x,y)$ funzione del singolo pixel.

5.3 Accuratezza della ricostruzione

A partire dal vettore immagine \bar{x}_c e dal piano ombra $\bar{\mathbf{w}}_s(\underline{x}_c) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ si ottiene il vettore $\bar{\mathbf{X}}_c = [X_c \ Y_c \ Z_c]^T$ rappresentativo del corrispondente punto nello spazio. Ricordando la (3.6), si ha:

$$Z_c = \frac{1}{\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{x}_c \rangle}$$

da cui:

$$\bar{\mathbf{X}}_c = Z_c \bar{x}_c = \frac{\bar{x}_c}{\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{x}_c \rangle}$$

La varianza relativa alla profondita' Z_c puo' essere espressa (cfr. Bouguet, Perona [1]) attraverso la seguente relazione approssimata:

$$\mathbf{S}_{Z_c}^2 \approx \frac{Z_c^4 \mathbf{w}_x^2}{f_o^2 I_x^2(\bar{x}_c)} \mathbf{S}_i^2 \quad (5.5)$$

Come risulta evidente dalla (5.5) l'errore nell'individuazione della profondita' Z_c e' direttamente funzione della prima coordinata del vettore $\bar{\mathbf{w}}_s(\underline{x}_c)$. Quindi Z_c rappresentera' una stima tanto piu' accurata quanto minore e' il valore di ω_x . Il gia' citato caso (cfr. §3.4) del piano ombra che passa per l'origine della telecamera rappresenta un caso limite. Infatti in tale circostanza $\| \bar{\mathbf{w}}_s(\underline{x}_c) \|$ va all'infinito, producendo di conseguenza una varianza $\mathbf{S}_{Z_c}^2$ infinita. In tutti i casi conviene non effettuare scansioni

con il piano ombra nelle vicinanze del centro della telecamera proprio per evitare di avere a che fare con valori comunque grandi di ω_x .

In conclusione si puo' ritenere che la ricostruzione e' accurata se i valori di profondita' associati a ciascun pixel presentano una varianza relativamente bassa. Come risulta dalla (5.5), la varianza in questione e' funzione delle seguenti quantita' (essendo le altre fissate a priori):

- Gradiente di luminosit  spaziale $I_x(x_c, y_c)$ legato allo spessore della zona di transizione del bordo dell'ombra.
- Prima coordinata del vettore rappresentativo del piano d'ombra.
- Profondita' del punto scandito nel riferimento della telecamera.

Giocando su questi 3 parametri si puo' cercare di migliorare la risoluzione della scansione.

Come si vedra' nel capitolo 7, risultati sperimentali assicurano che il valore della varianza stimata tramite la (5.5) e' coerente con il rumore misurato sperimentalmente dopo la ricostruzione.