

Capitolo 4

La calibrazione

4.1 Introduzione

In questo capitolo verrà presa in esame l'operazione di calibrazione della videocamera e della sorgente luminosa.

In un sistema di scansione 3D, calibrare una videocamera significa estrarre la posizione del piano di terra nel riferimento scelto ed una serie di parametri necessari alla successiva elaborazione. Tali parametri vengono detti *intrinseci* e sono:

- lunghezza focale (f_o)
- centro dell'immagine (\underline{c}_c)
- fattore di distorsione radiale (k)

Come si vedrà nel paragrafo 4.3 un modo per calibrare la telecamera è quello di inquadrare una scacchiera di dimensioni note collocata sul piano di terra. Dalla sua osservazione è possibile ricavare tutte le informazioni necessarie.

Calibrare la sorgente luminosa significa semplicemente trovare la posizione del punto luce nel riferimento scelto. Tale operazione, come più volte menzionato nei precedenti capitoli, non è necessaria se si utilizza, oltre al piano di terra, anche un piano verticale, perpendicolare al primo.

Prima di esaminare in dettaglio di queste procedure, è utile richiamare il modello della camera oscura (*pinhole model*) che, a dispetto della sua semplicità, riesce a schematizzare abbastanza bene un generico sistema di video camera CCD o CID.

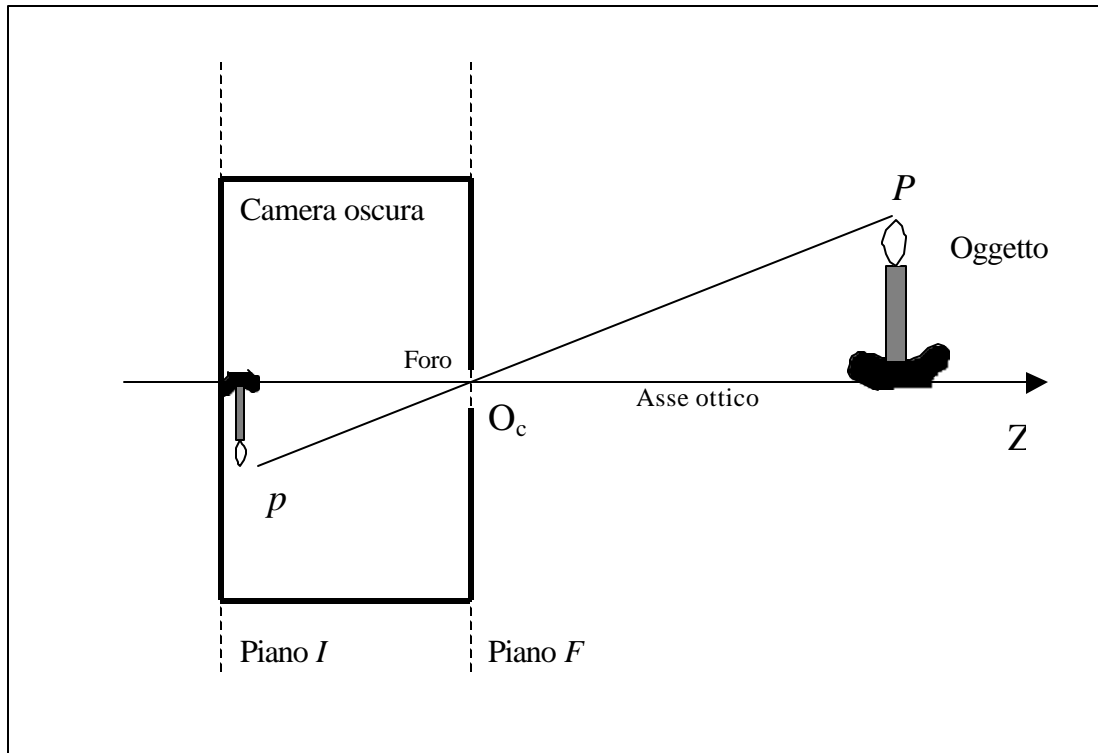


Figura 4.1: Il modello della camera oscura (pinhole model). Sul piano F della camera è stato praticato un foro attraverso cui filtrano i raggi luminosi provenienti dalla candela. Sul piano I , parallelo al piano F , si forma la cosiddetta proiezione percettiva della candela, ovvero la sua immagine ribaltata.

4.2 Il modello della camera oscura

Il modello proposto si basa essenzialmente sul principio della camera oscura. Lo schema di principio è illustrato nella figura 4.1.

Si consideri una scatola chiusa in cui è stato praticato un piccolo foro su una delle sue superfici. Si indichi con F il piano in cui è presente il foro. Da un oggetto, per esempio una candela, posto dinnanzi il piano F , partono raggi luminosi per emissione diretta o riflessa. Alcuni di questi raggi finiscono nel foro e formano sul piano I l'immagine invertita della candela.

I piani F e I sono detti rispettivamente *piano focale* e *piano immagine* (o *piano retina*) e la distanza tra loro è la *distanza focale* f_o . Il punto dove è stato praticato il foro si indica come *centro ottico* mentre la retta normale al piano focale passante per il foro è

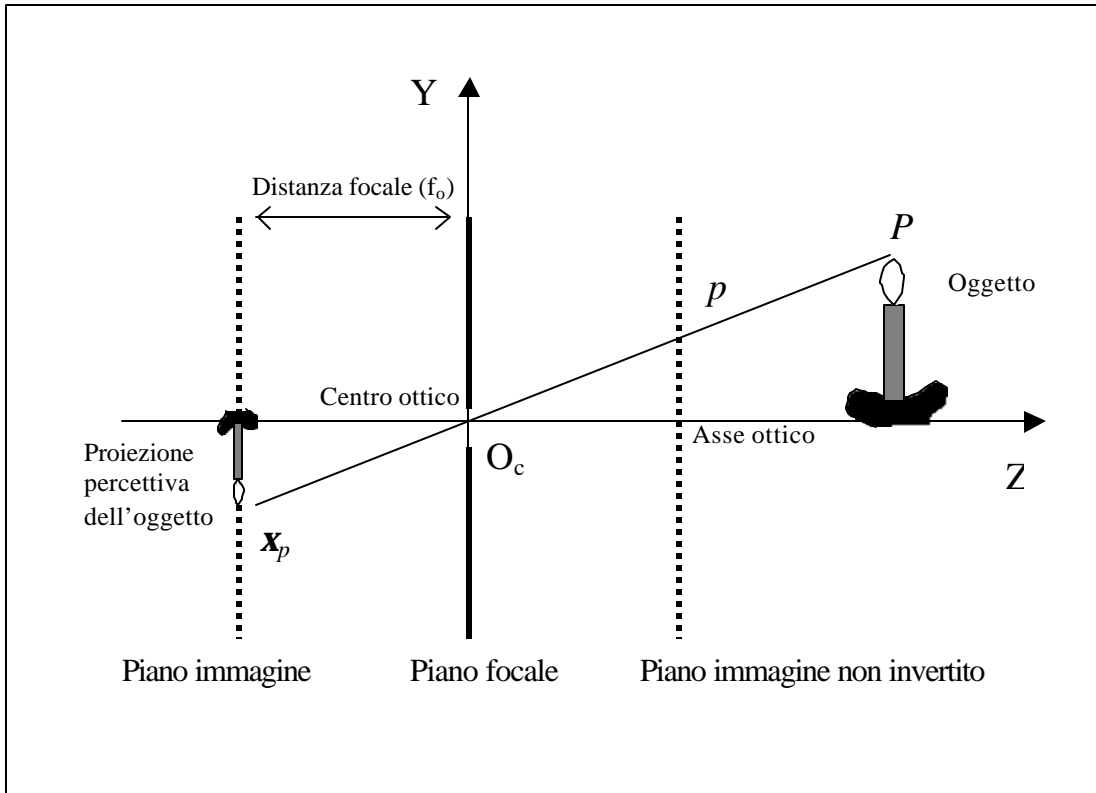


Figura 4.2: Schematizzazione del modello della camera oscura.

detto *asse ottico*. Infine la proiezione invertita dell'oggetto sul piano immagine e' detta *proiezione percettiva* dell'oggetto. Nella figura 4.2 e' stato schematizzato il modello della camera oscura mettendo in luce le grandezze ottiche e geometriche appena definite.

Si supponga adesso di scegliere un sistema di riferimento di assi cartesiani X Y Z di centro O_c coincidente con il centro ottico, come in figura 4.2. L'asse X e' stato scelto ortogonale al piano individuato dall'asse ottico e da Y. Se P e' un punto dell'oggetto, la sua posizione nel sistema di riferimento scelto sara' espressa dal vettore $\bar{X}_p = [X_p \ Y_p \ Z_p]^T$. La proiezione percettiva di P sul piano immagine individua il punto ξ_p la cui posizione e' data dal vettore $\bar{x}_p = [x_p \ y_p \ z_p]^T$.

Poiche' vale:

$$\frac{X_p}{Z_p} = \frac{x_p}{z_p} \quad \text{e} \quad \frac{Y_p}{Z_p} = \frac{y_p}{z_p}$$

e poiche' z_p e' pari alla lunghezza focale f_o , il vettore $\bar{\mathbf{x}}_p$ diventa:

$$\bar{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} -f_o \frac{X_p}{Z_p} \\ -f_o \frac{Y_p}{Z_p} \\ -f_o \end{bmatrix} = -\frac{f_o}{Z_p} \bar{\mathbf{X}}_p \quad (4.1)$$

Nella pratica puo' risultare comodo riferirsi non alla proiezione percettiva dell'oggetto sul piano immagine (che fornisce una versione ribaltata dell'oggetto stesso) ma bensì alla sua proiezione sul piano immagine non invertito¹ (cfr. figura 4.2). Questa e' la versione dell'oggetto come lo si vede realmente nel mirino della telecamera. Il piano immagine non invertito (parallelo al piano focale e quindi al piano immagine) e' collocato ad una distanza f_o dal centro ottico, a valle del piano focale.

Pertanto, detto $\bar{\mathbf{x}}_p$ il vettore che individua il punto p , proiezione di P sul piano immagine, si avra':

$$\bar{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} f_o \frac{X_p}{Z_p} \\ f_o \frac{Y_p}{Z_p} \\ f_o \end{bmatrix} = \frac{f_o}{Z_p} \bar{\mathbf{X}}_p \quad (4.2)$$

Se si divide la (4.2) per la lunghezza focale f_o (che si ipotizza nota dopo aver calibrato la telecamera), si ottengono le *coordinate normalizzate* del punto immagine p . In tal modo e' possibile definire il vettore normalizzato $\bar{\mathbf{x}}_{pn}$ come:

$$\bar{\mathbf{x}}_{pn} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_p}{f_o} = \frac{\bar{\mathbf{X}}_p}{Z_p} \quad (4.3)$$

¹ A partire da questo momento, la proiezione percettiva p di un generico punto P sul piano immagine non invertito potra' essere indicata sinteticamente come *immagine* del punto P . Inoltre quando si parlera' di piano immagine si intendera' sempre quello non invertito.

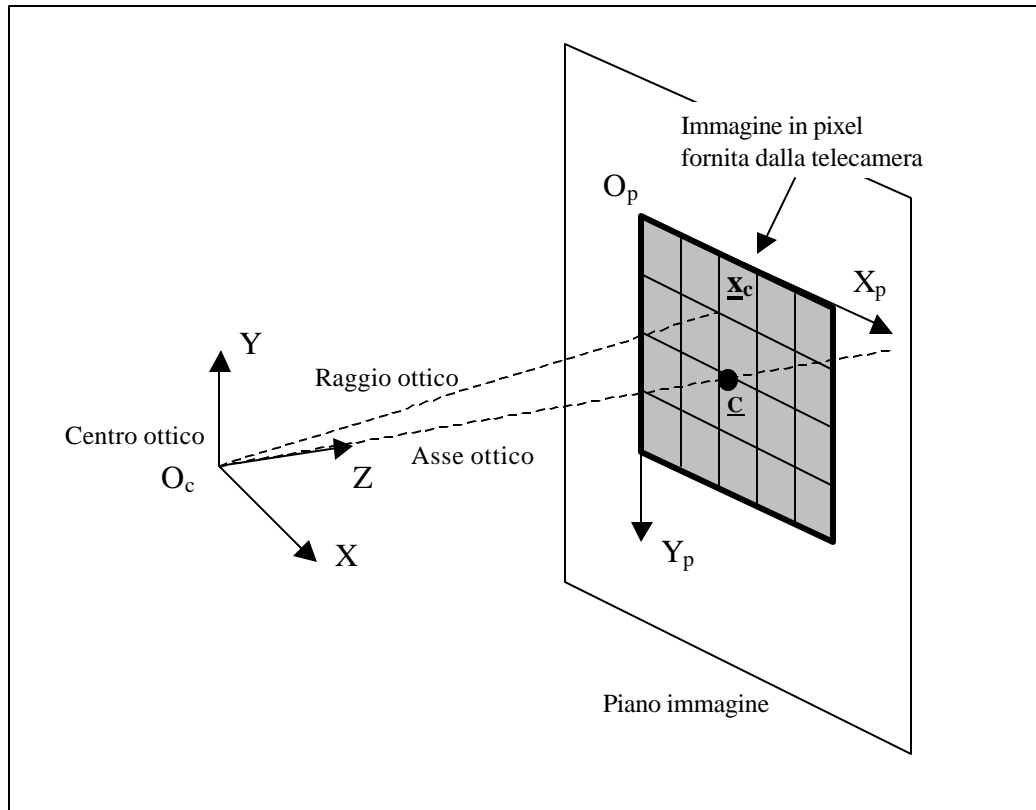


Figura 4.3: Immagine fornita dalla telecamera espressa in pixel. x_p e' il generico pixel e c_c e' il centro dell'immagine espresso in pixel. L'obiettivo e' trovare le coordinate del punto p associato a x_p nel riferimento della telecamera.

Non e' superfluo notare che la (4.3), o equivalentemente la (4.2), forniscono la relazione, piu' volte richiamata nel precedente capitolo, tra il vettore che individua un punto P nello scenario e il corrispondente vettore che individua la proiezione di P sul piano immagine.

Si consideri adesso un dato punto p nell'immagine in pixel fornita dalla telecamera. Si vuole determinare la posizione di tale punto nel riferimento (O_c, X, Y, Z) note le sue coordinate in pixel $x_p = (x_p, y_p)$.

Si faccia riferimento alla figura 4.3 per fissare le idee e si consideri un sistema di riferimento di assi cartesiani (O_p, X_p, Y_p) solidale con il piano immagine. Le coordinate del pixel x_p saranno pertanto riferite rispetto a tale sistema di riferimento. La risoluzione con cui vengono acquisite le immagini definisce l'intervallo di valori Δ_x e Δ_y a cui appartengono le coordinate x_p e y_p . Se per esempio la risoluzione di un immagine e'

320×240 pixel significa che x_p appartiene all'intervallo $[0, \Delta_x] = [0, 320]$ mentre y_p appartiene all'intervallo $[0, \Delta_y] = [0, 240]$.

Un altro parametro generalmente fornito dalla procedura di calibrazione e' il *centro dell'immagine* \underline{c}_c . Tale punto e' definito come l'intersezione dell'asse ottico con il piano immagine. Purtroppo il metodo proposto in questo lavoro per calibrare la telecamera non rende noto \underline{c}_c . Tuttavia non e' una cattiva approssimazione considerare \underline{c}_c come il centro geometrico dell'immagine. In altre parole \underline{c}_c puo' essere valutato (in pixel) nel seguente modo:

$$\underline{c}_c = (c_x, c_y) = \left(\frac{\Delta_x}{2}, \frac{\Delta_y}{2} \right) \quad (4.4)$$

Se si cambia il centro del sistema di riferimento (O_p, X_p, Y_p) facendo coincidere O_p con \underline{c}_c , e' possibile esprimere \underline{x}_p come:

$$\underline{x}'_p = (x_p - c_x, y_p - c_y)$$

Pertanto il punto p nel riferimento (O_c, X, Y, Z) associato al pixel \underline{x}_p sara' individuato dal vettore:

$$\bar{\underline{x}}_p = \begin{bmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \\ f \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dove f e' la lunghezza focale espressa in pixel. Se si normalizza rispetto a quest'ultima quantita', cioe' si divide tutto per f , si ottiene:

$$\bar{\underline{x}}_{pn} = \begin{bmatrix} \frac{x_p - c_x}{f} \\ \frac{y_p - c_y}{f} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Normalizzare rispetto a f permette di svincolarsi dalla risoluzione del pixel. In altri termini se si immagina un pixel come un quadratino di lato l , la risoluzione del pixel e' la lunghezza fisica associata ad l (per esempio l potrebbe essere 1mm). Dividendo tutto per la lunghezza focale, che pure e' espressa in pixel, si ottengono grandezze non piu' legate alle dimensioni fisiche del pixel. Cio' rende la quantita' \bar{x}_{pn} equivalente a quella espressa nella (4.3). Pertanto la (4.6) fornisce le coordinate normalizzate del pixel $\underline{x}_p=(x_p, y_p)$ nel riferimento (O_c, X, Y, Z) .

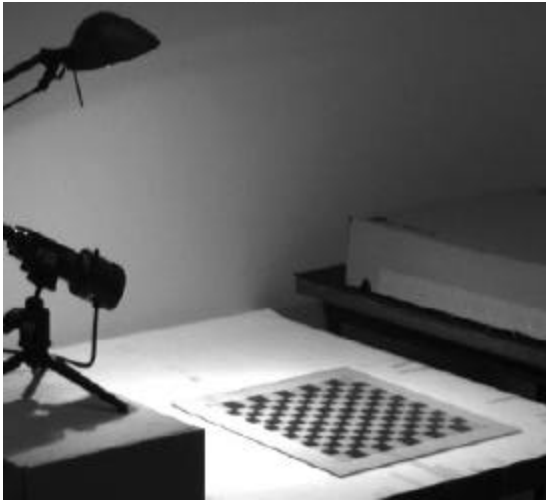


Figura 4.4: Equipaggiamento necessario per calibrare la telecamera. L'operazione richiede semplicemente il posizionamento di una scacchiera sul piano di terra.



Figura 4.5: Immagine acquisita per la calibrazione. Dal confronto tra la geometria della scacchiera (nota) e cio' che compare nell'immagine si possono estrarre i parametri intrinseci e la posizione del piano di terra.

4.3 La calibrazione della telecamera

Come anticipato nell'introduzione, lo scopo della calibrazione della telecamera e' quello di stimare i parametri intrinseci (lunghezza focale, centro dell'immagine e fattore di distorsione radiale) e di individuare la posizione del piano terra nel riferimento solidale con la telecamera. L'operazione viene svolta posizionando una scacchiera di forma nota sul piano di terra al posto dell'oggetto da scandire (cfr. figure 4.4 e 4.5).

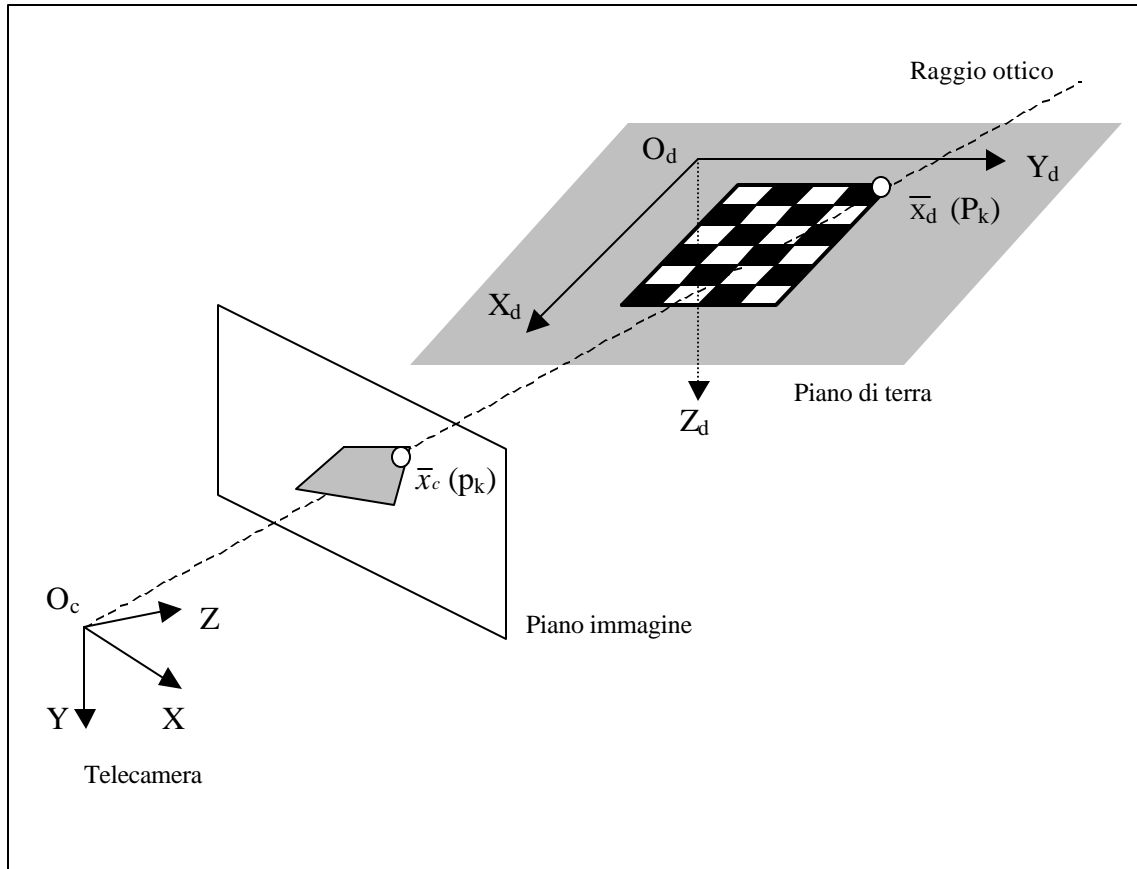


Figura 4.6: Schematizzazione delle grandezze in gioco nell'operazione di calibrazione. Un generico punto P sulla scacchiera (il vertice in alto a destra), individuato dal vettore \bar{X}_d , ha come immagine il punto p individuato dal vettore \bar{X}_c .

A partire dall'immagine catturata dalla telecamera si confrontano le proiezioni degli spigoli o dei vertici della scacchiera sul piano immagine con quanto si conosce a priori della scacchiera stessa (per esempio le dimensioni dei quadretti oppure il numero di quadretti presenti). Il metodo è fortemente ispirato all'algorithm proposto da Tsai in [2].

Si prenda in riferimento la figura 4.6. È stato scelto, oltre al solito sistema di riferimento di assi cartesiani (O_c, X, Y, Z) con O_c coincidente con il centro ottico, anche il sistema di riferimento (O_d, X_d, Y_d, Z_d) solidale con il piano di terra. Il piano generato dagli assi X_d e Y_d coincide con il piano di terra. Si consideri un punto P_k sulla scacchiera. Si indichi con \bar{X}_d^k il vettore le cui coordinate individuano la posizione di P_k nel riferimento (O_d, X_d, Y_d, Z_d) . Analogamente si indichi con \bar{X}_c^k il vettore le cui coordinate individuano la posizione di P_k nel riferimento (O_c, X, Y, Z) . Infine si indichi con \bar{x}_c^k il vettore immagine individuante il punto p_k , proiezione di P_k sul piano immagine

normalizzato nel riferimento (O_c, X, Y, Z) . L'unica cosa di cui si è a conoscenza sono le coordinate di P_k nel riferimento solidale con la scacchiera. Quindi il vettore \bar{X}_d^k è noto. Le coordinate di P_k nel riferimento della telecamera è una delle incognite del problema.

Invero esiste un'unica trasformazione rigida che permette di passare dal riferimento (O_d, X_d, Y_d, Z_d) a quello (O_c, X, Y, Z) e viceversa. Indicando con \bar{R}_c e \bar{T}_c rispettivamente la matrice di rotazione e il vettore di traslazione che definiscono la trasformazione rigida tra i due riferimenti, è possibile passare da un set di coordinate all'altro tramite la seguente equazione:

$$\bar{X}_c^k = \bar{R}_c \bar{X}_d^k + \bar{T}_c \quad (4.7)$$

Ovviamente le grandezze \bar{R}_c e \bar{T}_c sono incognite.

Supponendo che:

$$\bar{X}_c^k = \begin{bmatrix} X_c^k \\ Y_c^k \\ Z_c^k \end{bmatrix}$$

e ricordando la (4.3), il vettore immagine normalizzato \bar{x}_c^k sarà:

$$\bar{x}_c^k = \begin{bmatrix} X_c^k \\ Y_c^k \\ Z_c^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_c^k}{Z_c^k} \\ \frac{Y_c^k}{Z_c^k} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Per poter esprimere le componenti di \bar{x}_c^k in pixel occorre fare degli ulteriori passaggi. Innanzitutto bisogna considerare che la telecamera introduce la cosiddetta *distorsione radiale*, dovuta agli effetti di aberrazione delle lenti. Per esempio una retta può essere vista come una linea curva. Ciò accade soprattutto ai bordi dell'immagine. Si introduce allora il terzo parametro intrinseco detto appunto *fattore di distorsione radiale k*.

Le componenti di \bar{x}_c^k , non tenendo conto di per se' della distorsione radiale, dovranno essere modificate per come segue (la terza componente, per altro banale, si omette per snellire la notazione) :

$$\tilde{x}_c^k = \begin{bmatrix} a_c \\ b_c \end{bmatrix} = (1 + k \|\bar{x}_c^k\|^2) \bar{x}_c^k \quad (4.9)$$

Si noti inoltre come tali componenti siano uguali, a meno del fattore k , a quelle del vettore espresso nella (4.6). Pertanto si puo' pensare di moltiplicare \tilde{x}_c^k per la lunghezza focale f . Essendo quest'ultima quantita' espressa in pixel, anche $\tilde{x}_c^k f$ avra' le componenti espresse in pixel. Infine traslando rispetto al centro dell'immagine \underline{c}_c , si perviene al seguente vettore:

$$\tilde{\tilde{x}}_c^k = \begin{bmatrix} f a_c + c_x \\ f b_c + c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \underline{x}_c^k \quad (4.10)$$

In definitiva si e' partiti dal vettore \bar{X}_d^k (noto) che individua un dato punto P_k sulla scacchiera e si e' pervenuti al vettore $\tilde{\tilde{x}}_c^k$ le cui coordinate esprimono la posizione in pixel \underline{x}_c^k del corrispondente punto p_k nell'immagine. Tali coordinate sono anch'esse note, perche' misurabili direttamente dall'immagine fornita dalla telecamera. Indicando con \mathfrak{N} l'operatore che permette di passare da un vettore all'altro, le quantita' da determinare, coinvolte nella trasformazione \mathfrak{N} , sono $f, \underline{c}_c, k, \bar{R}_c$ e \bar{T}_c . In sintesi:

$$\tilde{\tilde{x}}_c^k = \underline{x}_c^k = \mathfrak{N}(f, \underline{c}_c, k, \bar{R}_c, \bar{T}_c, \bar{X}_d^k) \quad (4.11)$$

Pertanto la procedura di calibrazione consiste nel trovare il set di parametri (in totale 10 scalari) che permettere di far coincidere, per ogni vertice P_k sulla scacchiera, la quantita' $\mathfrak{N}(f, \underline{c}_c, k, \bar{R}_c, \bar{T}_c, \bar{X}_d^k)$ con il pixel \underline{x}_c^k estratto dall'immagine.

Definendo l'errore e_k come:

$$e_k = \left\| \underline{x}_c^k - \mathfrak{N}(f, \underline{c}_c, k, \bar{R}_c, \bar{T}_c, \bar{X}_d^k) \right\|$$

e introducendo la seguente funzione di costo:

$$\wp = \sum_k e_k^2$$

l'operazione di calibrazione diventa quella di dover trovare l'insieme di 10 scalari che minimizzi la funzione di costo \wp .

Il problema di minimizzazione della funzione \wp non e' facilmente risolvibile a causa delle non linearita' introdotte dalle equazioni 4.6 ÷ 4.10 ovvero a causa del fatto che la trasformazione:

$$\mathfrak{N} : \overline{\mathbf{X}}_d^k \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_c^k$$

e' fortemente non lineare. Il problema viene risolto in modo numerico usando un tipico approccio a gradiente discendente. Inoltre si puo' far vedere (cfr. Bouguet, Perona in [1]) che il centro dell'immagine \underline{c}_c e' difficile da stimare usando un solo piano di calibrazione (nel caso in questione, il piano della scacchiera). Quindi si sceglie \underline{c}_c pari al centro geometrico dell'immagine, come definito nella (4.4), e si minimizza la funzione \wp solo sui rimanenti 8 parametri scalari presenti nelle quantita' f, k, \overline{R}_c e \overline{T}_c .

A fronte di risultati sperimentali, la procedura di calibrazione risulta molto stabile rispetto al rumore presente nell'immagine e converge, nella maggior parte dei casi, all'esatto minimo usando una condizione iniziale fissata e uguale per tutti gli esperimenti. Con riferimento alla figura 4.7, si sono indicate con delle croci tutti gli spigoli della scacchiera che corrispondono ai punti p_k (ovvero ai pixel \underline{x}_c^k), mentre i cerchietti rappresentano la stima $\hat{\underline{x}}_c^k$ della posizione degli spigoli dopo la minimizzazione. Come si puo' vedere dalla figura, cerchietti e croci coincidono. Questo sta a significare che i parametri trovati dopo la minimizzazione rendono la stima $\hat{\underline{x}}_c^k$ praticamente coincidente con \underline{x}_c^k , il che garantisce sufficiente precisione nei risultati della procedura di calibrazione.

Si vuole mostrare adesso come ricavare la posizione del piano di terra Π_d nel sistema di riferimento solidale con la telecamera, noti \overline{R}_c e \overline{T}_c . E' possibile rappresentare

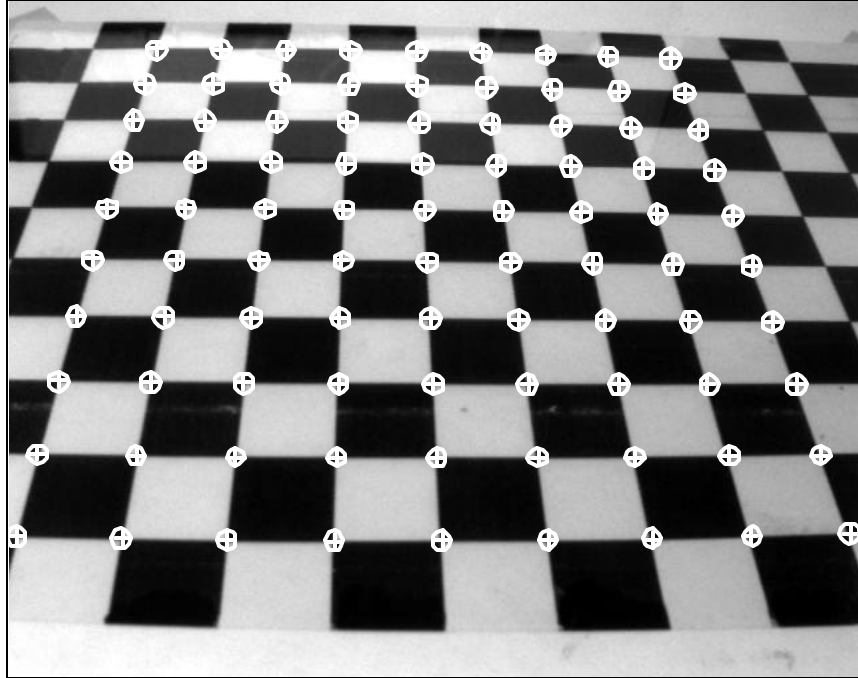


Figura 4.7: Risultato dell'operazione di calibrazione. I cerchietti rappresentano la stima degli spigoli della scacchiera (indicati con le croci) dopo la minimizzazione della funzione di costo. Come si puo' vedere, cerchietti e spigoli si sovrappongono indicando che la calibrazione e' stata effettuata con successo.

il piano Π_d nel riferimento (O_c, X_c, Y_c, Z_c) tramite il vettore $\bar{\mathbf{w}}'_d$:

$$\bar{\mathbf{w}}'_d = \frac{\bar{\mathbf{n}}'_d}{d_d}$$

dove $\bar{\mathbf{n}}'_d$ e' il vettore normale unitario al piano Π_d nel sistema di riferimento (O_c, X, Y, Z) mentre d_d e' la distanza del piano stesso dall'origine O_c . Se si indica con $\bar{\mathbf{n}}_d$ il vettore normale unitario al piano Π_d nel sistema di riferimento (O_d, X_d, Y_d, Z_d) , esso sara' :

$$\bar{\mathbf{n}}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il vettore $\bar{\mathbf{n}}_d$ puo' essere espresso nel riferimento (O_c, X, Y, Z) tramite la trasformazione rigida definita da $\bar{\mathbf{R}}_c$ e $\bar{\mathbf{T}}_c$. Pertanto $\bar{\mathbf{n}}'_d$ si calcola come:

$$\bar{n}'_d = \bar{R}_c \bar{n}_d + \bar{T}_c$$

Indicando con \bar{X}_c^k il vettore che individua la posizione di un punto P_k sulla scacchiera nel riferimento (O, X, Y, Z) e ricordando la proprietà 2 del capitolo III, si può scrivere:

$$\langle \bar{X}_c^k, \bar{w}'_d \rangle = \left\langle \bar{X}_c^k, \frac{\bar{n}'_d}{d_d} \right\rangle = 1 \quad (4.12)$$

Se si suppone \bar{X}_c^k noto, dalla equazione scalare (4.12) si ricava d_d , e quindi il vettore \bar{w}'_d . Per ulteriori dettagli sulla calibrazione della telecamera si può consultare Faugeras in [3].

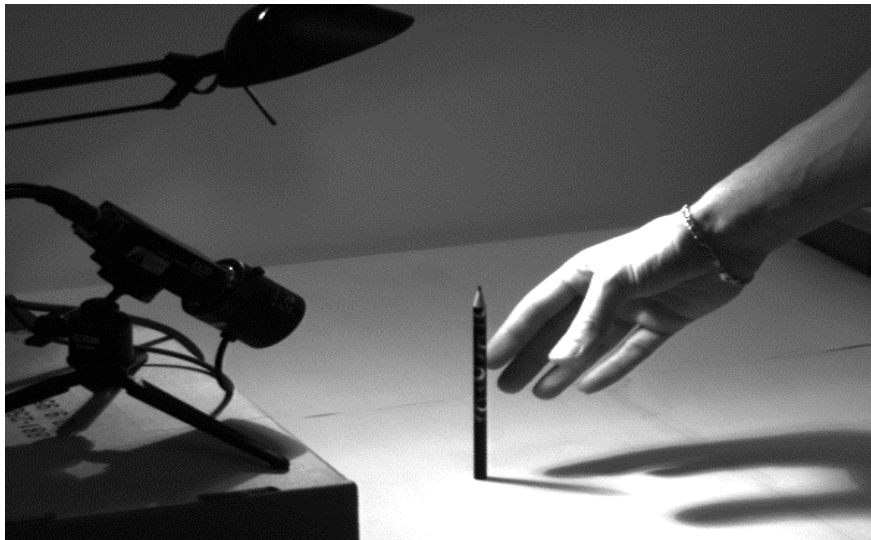


Figura 4.8: Equipaggiamento richiesto per la calibrazione della sorgente luminosa. Un operatore colloca una matita in vari punti del piano di terra. L'osservazione dell'ombra proiettata dalla matita fornisce informazioni sufficienti per ricavare la posizione del punto luce.

4.4 La calibrazione della sorgente luminosa

Calibrare una sorgente luminosa significa individuarne la posizione in determinato sistema di riferimento. L'operazione può essere effettuata in vari modi. Un

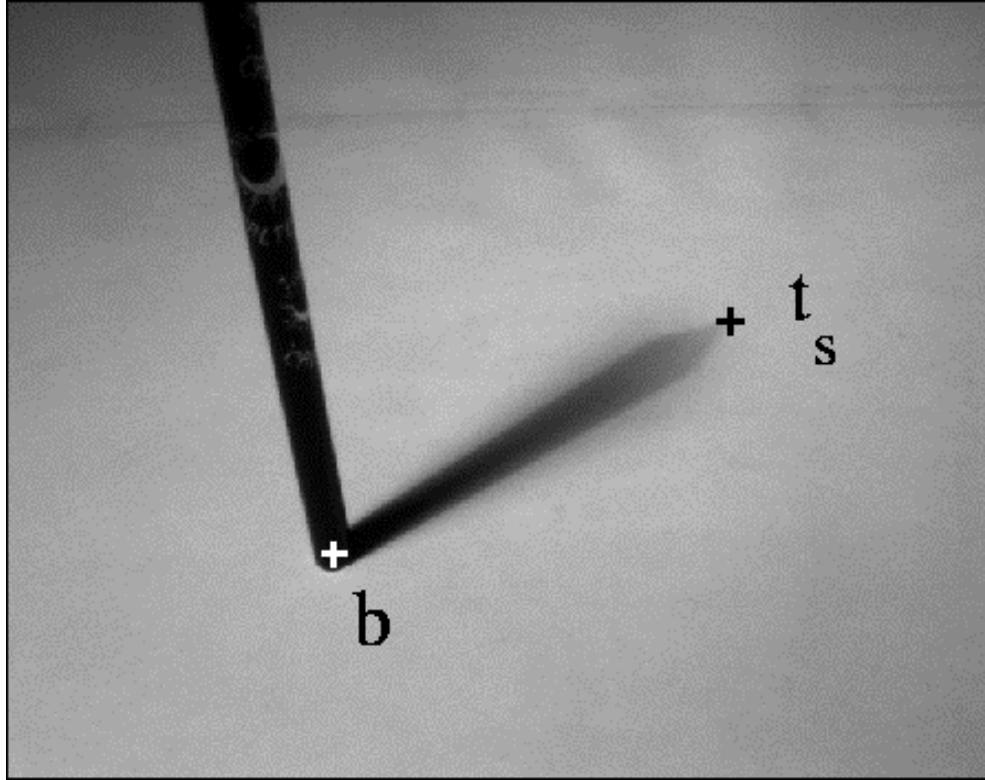


Figura 4.9: Immagine osservata dalla telecamera durante l'operazione di calibrazione del punto luce. La posizione in pixel dei punti b e t_s consente di trovare la posizione del punto luce nel riferimento solidale con la telecamera.

metodo semplice e preciso, che richiede come equipaggiamento il solo utilizzo di una matita, e' quello che viene proposto di seguito.

Un operatore colloca una matita sul piano di terra Π_h illuminato dalla sorgente luminosa (cfr. figura 4.8). L'immagine catturata dalla telecamera e' illustrata in figura 4.9. La matita proietta un'ombra sul piano di terra dalla quale si estrae la posizione in pixel della punta (punto immagine t_s) e della base (punto immagine b). Si indichino le due grandezze rispettivamente con \underline{t}_s e \underline{b} . Tali punti vengono individuati nel riferimento solidale con la telecamera (O_c, X, Y, Z) dai vettori \bar{t}_s e \bar{b} (cfr. figura 4.10) che risultano noti dopo aver calibrato la telecamera. Per trovare la posizione della punta e della base dell'ombra della matita sul piano di terra, ovvero i vettori \bar{T}_s e \bar{B} , si intersecano rispettivamente i raggi ottici (O_c, \bar{t}_s) e (O_c, \bar{b}) con Π_h . Se si assume nota l'altezza h della matita, si possono dedurre le coordinate \bar{T} della punta. Pertanto il punto luce S , rappresentato dal vettore \bar{S} , deve giacere sulla retta Δ individuata dal vettore $\bar{T} - \bar{T}_s$.

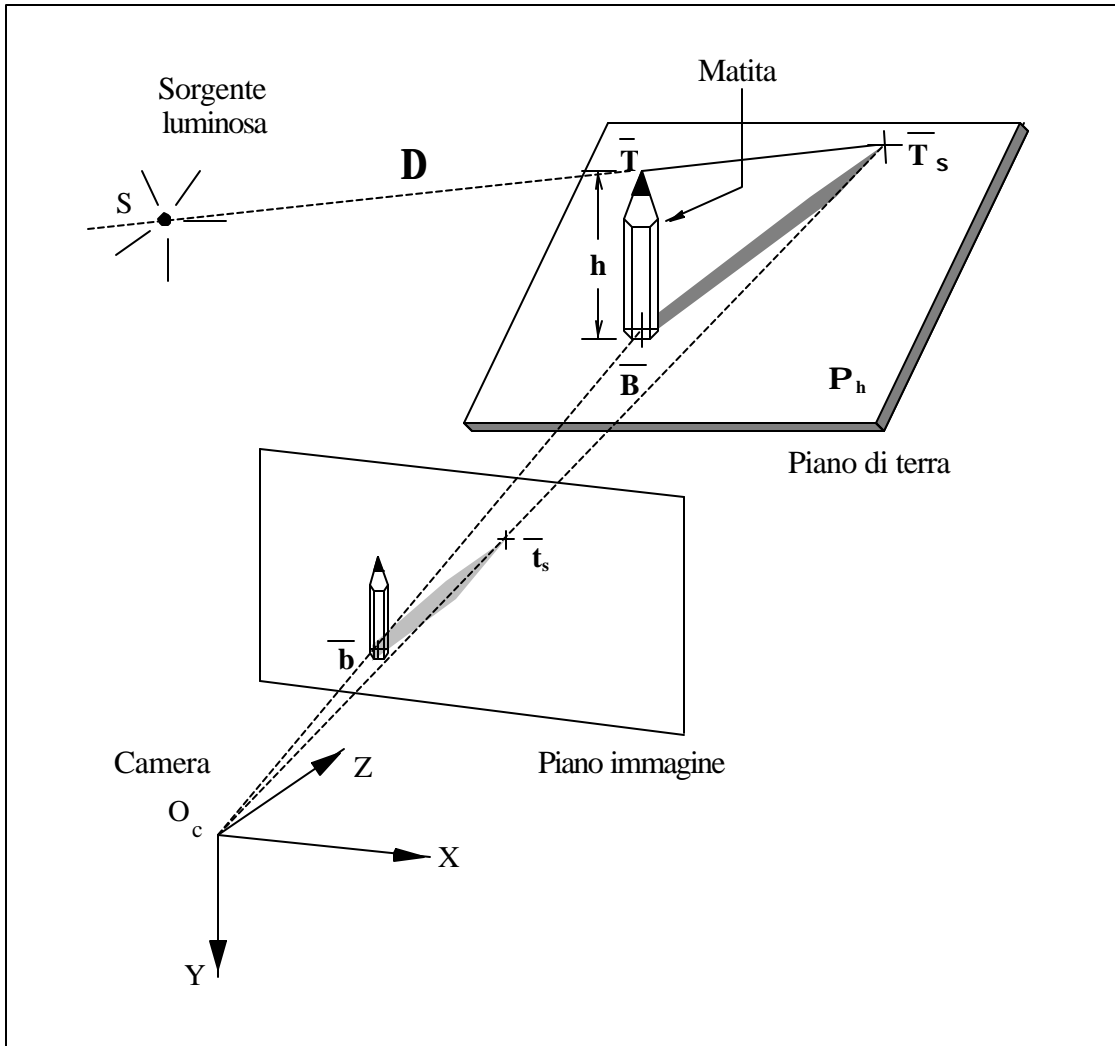


Figura 4.10: Schematizzazione geometrica nella calibrazione del punto luce. La sorgente luminosa deve giacere sulla retta Δ passante per la punta della matita e per la punta dell'ombra proiettata dalla matita stessa.

Se a questo punto si colloca la matita in un'altro punto del piano di terra, vengono estratti dall'immagine osservata due differenti vettori \bar{T}'_s e \bar{B}' e quindi una differente retta Δ' passante per essi. Il punto luce e' è individuato dall'intersezione tra Δ e Δ' . Tale intersezione si determina come segue.

Dire che S giace sulla retta Δ significa dire che esiste uno scalare \mathbf{I} tale che:

$$\bar{S} = \bar{T} + \mathbf{I} (\bar{T} - \bar{T}_s) = \bar{T} + \bar{\mathbf{I}} \quad (4.13)$$

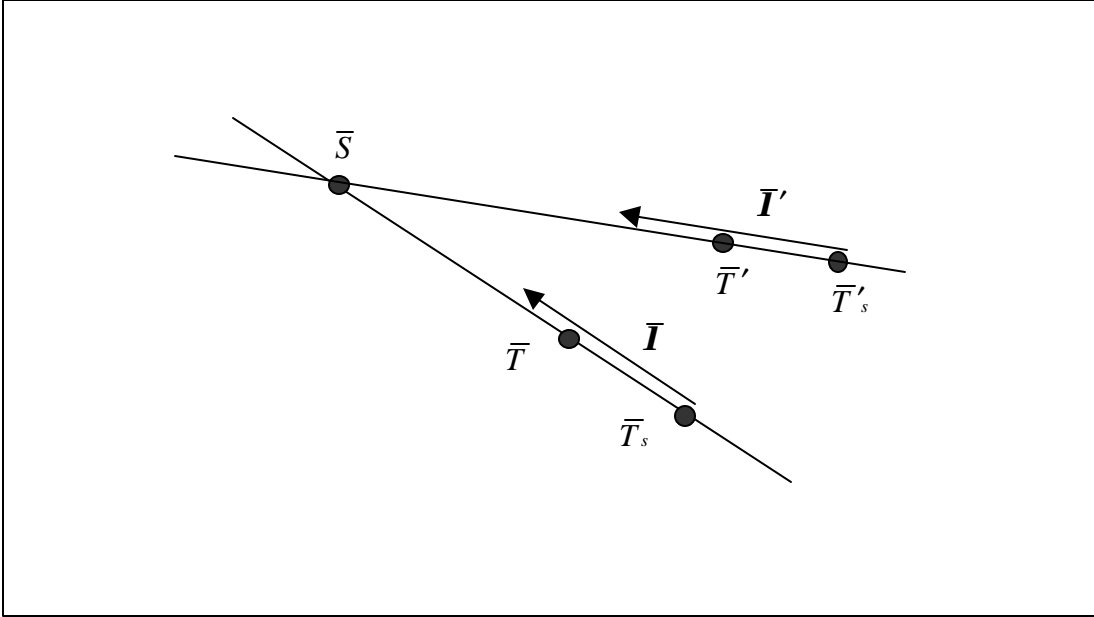


Figura 4.11: Localizzazione del punto luce S. Dalla risoluzione del sistema espresso dalle 4.13 e 4.14 si possono ricavare le componenti del vettore \bar{S} .

Analogamente dire che S giace sulla retta Δ' significa dire che esiste uno scalare I' tale che:

$$\bar{S} = \bar{T}' + \mathbf{I}' (\bar{T}' - \bar{T}'_s) = \bar{T}' + \mathbf{I}' \quad (4.14)$$

La (4.13) e la (4.14) costituiscono un sistema di 6 equazioni scalari in 5 incognite (\mathbf{I}, \mathbf{I}' e le 3 componenti di \bar{S}) risolvendo il quale si completa l'operazione di calibrazione.

L'analisi al solito si complica in presenza del rumore. In tal caso le due rette Δ e Δ' non si intersecano necessariamente, creando dei problemi nell'individuazione di \bar{S} . L'idea e' allora quella di ripetere la procedura di prima invece che due volte, N volte. In tal modo si ricavano N equazioni del tipo (cfr. figura 4.12):

$$\bar{S} = \bar{T}^n + \mathbf{I}^n (\bar{T}^n - \bar{T}_s^n) = \bar{T}^n + \mathbf{I}^n \quad (4.15)$$

con $n = 1, 2, \dots, N$. Indicando con Δ^i la generica retta individuata dal vettore \bar{T}^i , il vettore \bar{S} viene determinato come intersezione tra le N rette Δ^n nel senso dei minimi quadrati. Di seguito viene illustrato come determinare tale intersezione.

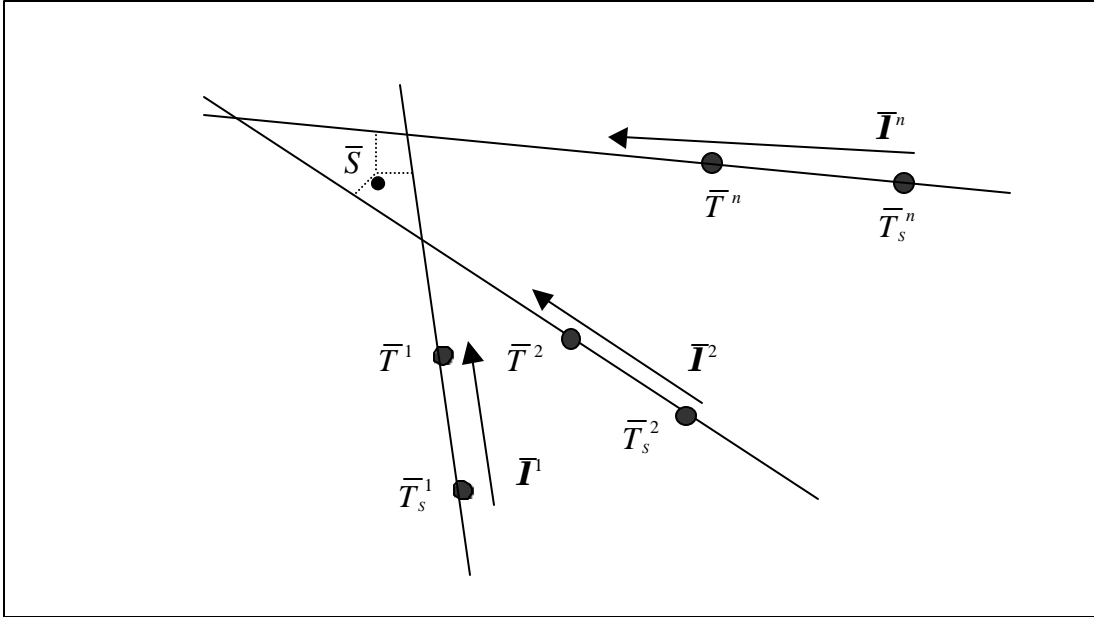


Figura 4.12: Localizzazione del punto luce S in presenza di rumore. In questo caso il punto S viene trovato intersecando N rette nel senso dei minimi quadrati.

Le (4.15) costituiscono un sistema lineare di $3N$ equazioni scalari in $N+3$ incognite. La soluzione cercata e' il vettore di parametri $\bar{p} = [\mathbf{I}^1 \ \mathbf{I}^2 \ \dots \ \mathbf{I}^n]^T$ e il vettore \bar{S} tali da minimizzare la somma dei quadrati delle distanze del punto luce S dalle linee Δ^n . In altri termini, introducendo la funzione di costo $C(\bar{S}, \bar{p})$ definita come segue:

$$C(\bar{S}, \bar{p}) = \sum_{n=1}^N \left\| (\bar{T}^n + \bar{I}^n) - \bar{S} \right\|^2 \quad (4.16)$$

il problema diventa quello di trovare i vettori ottimi \bar{p} e \bar{S} tali da minimizzare la funzione di costo $C(\bar{S}, \bar{p})$.

Allo scopo, si impone che la matrice Jacobiana della funzione $C(\bar{S}, \bar{p})$ sia zero:

$$\left[\frac{\partial C}{\partial \bar{S}} \quad \frac{\partial C}{\partial \bar{p}} \right] = 0 \quad (4.17)$$

Cio' porta al seguente insieme di equazioni (per $i = 1, 2 \dots N$) :

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{S}} = 0 \Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{T}^n + \mathbf{I}^n \bar{v}^n) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{p}} = 0 \Rightarrow \langle \bar{v}^i, \bar{S} \rangle - \|\bar{v}^i\|^2 \mathbf{I}_i = \langle \bar{v}^i, \bar{T}_s^i \rangle \quad (4.19)$$

dove $\bar{v}^i = \langle \bar{T}^i - \bar{T}_s^i \rangle$. Si noti come l'equazione (4.18) fornisca una espressione diretta per \bar{S} come funzione dei parametri $\mathbf{I}^1, \mathbf{I}^2, \dots, \mathbf{I}^N$. Inserendo la (4.18) nell'insieme di equazioni (4.19), si ha (per $i=1, 2 \dots N$):

$$\|\bar{v}^i\|^2 \mathbf{I}_i - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle \bar{v}^i, \bar{v}^n \rangle \mathbf{I}^n = \langle \bar{v}^i, \bar{\mathbf{m}} - \bar{T}_s^i \rangle \quad (4.20)$$

dove la quantita' media $\bar{\mathbf{m}}$ e' definita come segue:

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{T}^n \quad (4.21)$$

Riscrivendo la (4.20) in forma matriciale, si ha:

$$\mathbf{A} \bar{p} = \mathbf{b} \quad (4.22)$$

Dove \mathbf{A} e' la matrice $N \times N$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \|\bar{v}^1\|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|\bar{v}^2\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\bar{v}^N\|^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \langle \bar{v}^1, \bar{v}^1 \rangle & \langle \bar{v}^1, \bar{v}^2 \rangle & \dots & \langle \bar{v}^1, \bar{v}^N \rangle \\ \langle \bar{v}^2, \bar{v}^1 \rangle & \langle \bar{v}^2, \bar{v}^2 \rangle & \dots & \langle \bar{v}^2, \bar{v}^N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar{v}^N, \bar{v}^1 \rangle & \langle \bar{v}^N, \bar{v}^2 \rangle & \dots & \langle \bar{v}^N, \bar{v}^N \rangle \end{bmatrix}$$

e \mathbf{b} il vettore:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{v}}^1, \bar{\mathbf{m}} - \bar{T}^1 \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{v}}^2, \bar{\mathbf{m}} - \bar{T}^2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{\mathbf{v}}^N, \bar{\mathbf{m}} - \bar{T}^N \rangle \end{bmatrix}$$

Dalla (4.22) si ricava il vettore ottimo $\bar{\mathbf{p}}$:

$$\bar{\mathbf{p}} = [\mathbf{I}^1 \ \mathbf{I}^2 \ \dots \ \mathbf{I}^N]^T = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (4.24)$$

e quindi dalla (4.18) anche la posizione ottima della sorgente luminosa:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{S}}^n \quad (4.25)$$

con $\bar{\mathbf{S}}^n = \bar{T}^n + \mathbf{I}^n \bar{\mathbf{v}}^n$.

Si noti che, nell'equazione (4.25), il vettore $\bar{\mathbf{S}}^n$ individua la posizione del punto piu' vicino alla sorgente luminosa S tra quelli appartenenti alla retta Δ^n , ovvero rappresenta la proiezione ortogonale di $\bar{\mathbf{S}}$ sulla retta Δ^n . Se non c'e' rumore nella misura, tutte le rette Δ^n si intersecano in un unico punto dello spazio e la costellazione di vettori $\bar{\mathbf{S}}^n$ collassa in $\bar{\mathbf{S}}$. Altrimenti, in presenza di rumore, il vettore $\bar{\mathbf{S}}$ che individua la posizione ottima per la sorgente luminosa e' il vettor medio (detto anche *centroide*) dell'insieme di vettori $\{\bar{\mathbf{S}}^n\}_{n=1\dots N}$ ottenuti dall'equazione (4.25).

Il problema della calibrazione e' pertanto completamente risolto.