

Capitolo 3

Il metodo visto nella geometria dello spazio duale

Nel precedente capitolo e' stato esposto in linea generale il metodo a luce debolmente strutturata enfatizzando soprattutto la localizzazione temporale e spaziale. Le successive fasi – determinazione del piano ombra e triangolazione – possono essere descritte in maniera compatta ed elegante, dal punto di vista del formalismo matematico, introducendo la geometria dello spazio duale. L'idea che vi e' dietro e' quella di vedere elementi definiti nello spazio euclideo, quali per esempio punti, rette, piani, in uno spazio che viene detto, appunto, *duale*. Verra' pertanto individuata una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due spazi. Nella nuova rappresentazione duale, gli oggetti potranno essere facilmente relazionati con le corrispondenti proiezioni sul piano immagine con vantaggi in termini computazionali.

3.1 Definizione di spazio duale

Si indichi con $(E) = \hat{\mathbf{A}}^3$ lo spazio Euclideo tridimensionale associato al sistema di riferimento di assi cartesiani di centro Oc. Sia \mathfrak{S} un sottodominio di (E) . Esempi di \mathfrak{S} possono essere un punto, una retta, un piano o una superficie. Si consideri il piano Π , per fissare le idee. Tale piano e' univocamente rappresentato in (E) dal quel vettore $\bar{\mathbf{w}} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ tale che, per ogni punto P appartenente a Π espresso dal vettore $\bar{\mathbf{X}}_p = [X_p \ Y_p \ Z_p]^T$, verra' soddisfatta la condizione:

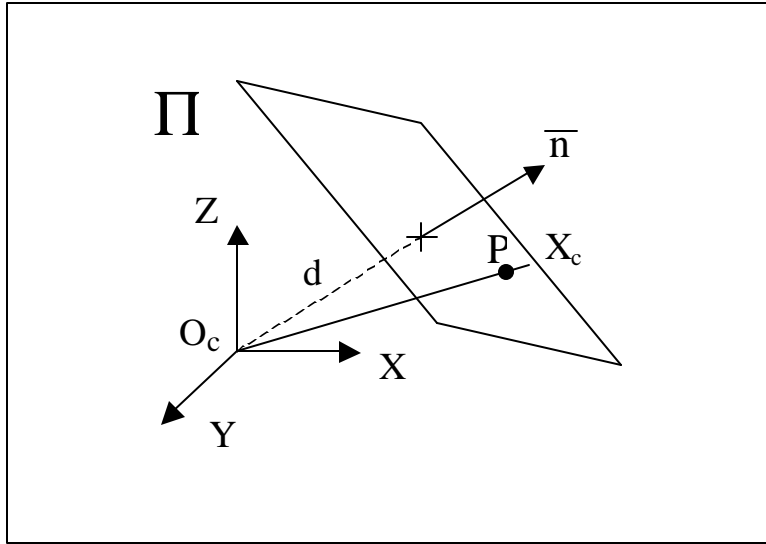


Figura 3.1: Definizione di piano P che non attraversa l'origine. Il piano Π è univocamente determinato dal vettore normale \bar{n} e dalla distanza d dall'origine.

$$\langle \bar{w}, \bar{X}_p \rangle = 1$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è l'operatore di prodotto scalare.

Si noti esplicitamente che \bar{w} è anche definito come \bar{n}/d , dove \bar{n} è il vettore normale unitario del piano Π e d è la distanza dall'origine O_c del sistema di riferimento (Cfr. figura 3.1). La distanza d verrà sempre assunta positiva e ciò corrisponde a considerare piani non passanti per l'origine. Tale ipotesi, nell'ambito delle configurazioni geometriche adoperate in questo contesto, verrà supposta sempre soddisfatta.

Si definisca adesso lo spazio $(\Omega) = \hat{\mathbf{A}}^3$, associato al sistema di assi cartesiani di centro O , e si assuma che $\bar{w} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ individui un punto $\hat{\Pi}$ in (Ω) . Dato che a ciascun vettore \bar{w} corrisponde un unico piano Π in (E) , $\hat{\Pi}$ viene indicato come il *duale* del piano Π , e (Ω) è detto *spazio duale*. In questo caso particolare un piano nello spazio Euclideo corrisponde ad un punto nello spazio duale.

È possibile generalizzare il concetto di trasformazione duale. Sia \mathcal{S} un generico sottodominio di (E) . Il duale $\hat{\mathcal{S}}$ di \mathcal{S} è definito come l'insieme di vettori \bar{w} nello spazio duale (Ω) che rappresentano tutti i possibili piani tangenti a \mathcal{S} .

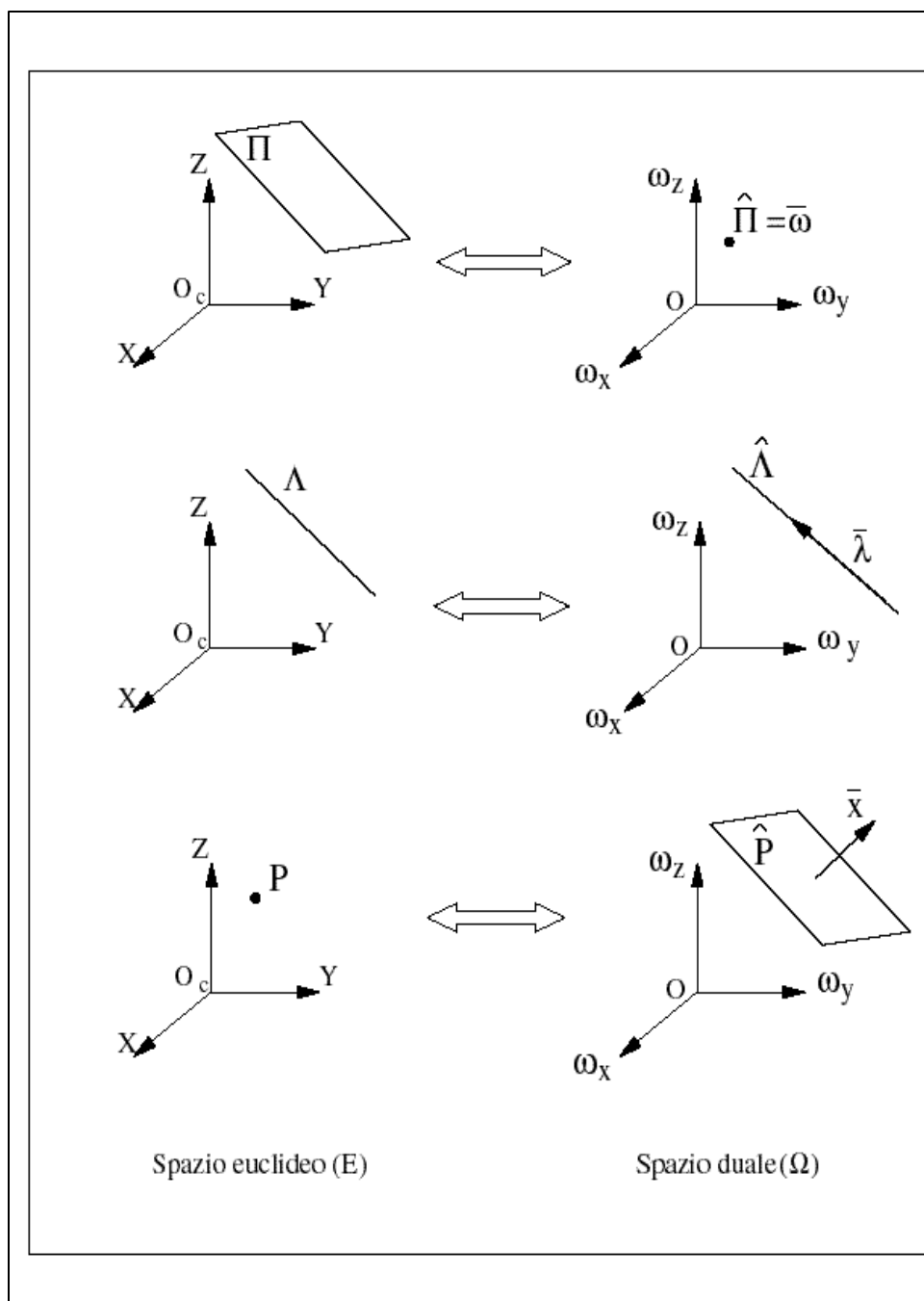
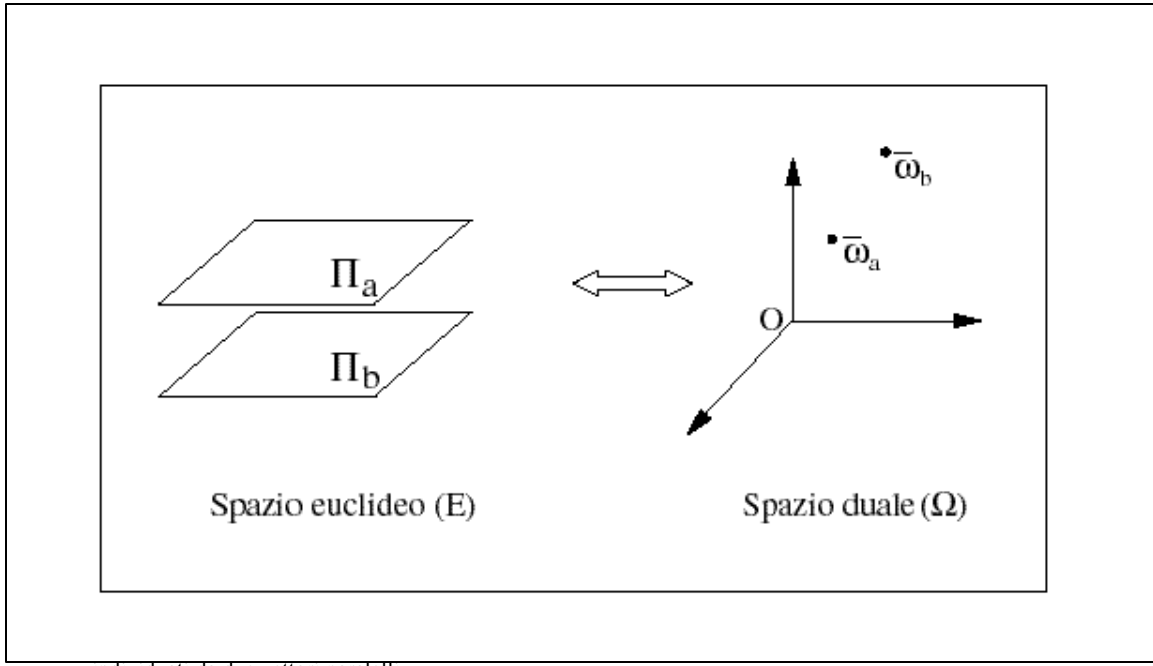


Figura 5.2: Principio di dualità. Nella figura sono riportate le immagini duali di un punto P , una retta Λ e un piano Π .

Ad esempio se \mathfrak{S} è un punto P , esistono infiniti piani tangenti a \mathfrak{S} rappresentati da un set infinito di vettori. Tali vettori individuano nello spazio (Ω) un piano \hat{P} che sarà appunto l'immagine duale del punto P . Inoltre il piano \hat{P} è univocamente rappresentato dal vettore \bar{x} normale al piano stesso.



individuati da due vettori paralleli.

In maniera del tutto analoga una retta Λ nello spazio (E) corrisponde ad una retta $\hat{\Lambda}$ nello spazio duale. Infine, come già visto all'inizio del paragrafo, un piano Π in (E) corrisponde al punto $\hat{\Pi}$ in (Ω). Tali corrispondenze sono riassunte nella figura 3.2.

3.2 Proprietà del formalismo duale

Le proposizioni che seguono sintetizzano alcune delle proprietà legate alla geometria dello spazio duale. In pratica si vuole analizzare tale formalismo soprattutto alla luce del metodo proposto e non in via del tutto generale.

Proposizione 1. Siano Π_a e Π_b due piani paralleli in (E) espressi dai due vettori \bar{w}_a e \bar{w}_b (Crf. figura 3.3) e siano $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$ i corrispondenti duali. In tali ipotesi i vettori \bar{w}_a e \bar{w}_b , che individuano i due punti $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$ nello spazio duale, risultano paralleli.

Prova. I piani, essendo paralleli, hanno i corrispondenti vettori normali unitari paralleli. Ricordando la definizione di \bar{w} , segue l'asserto.

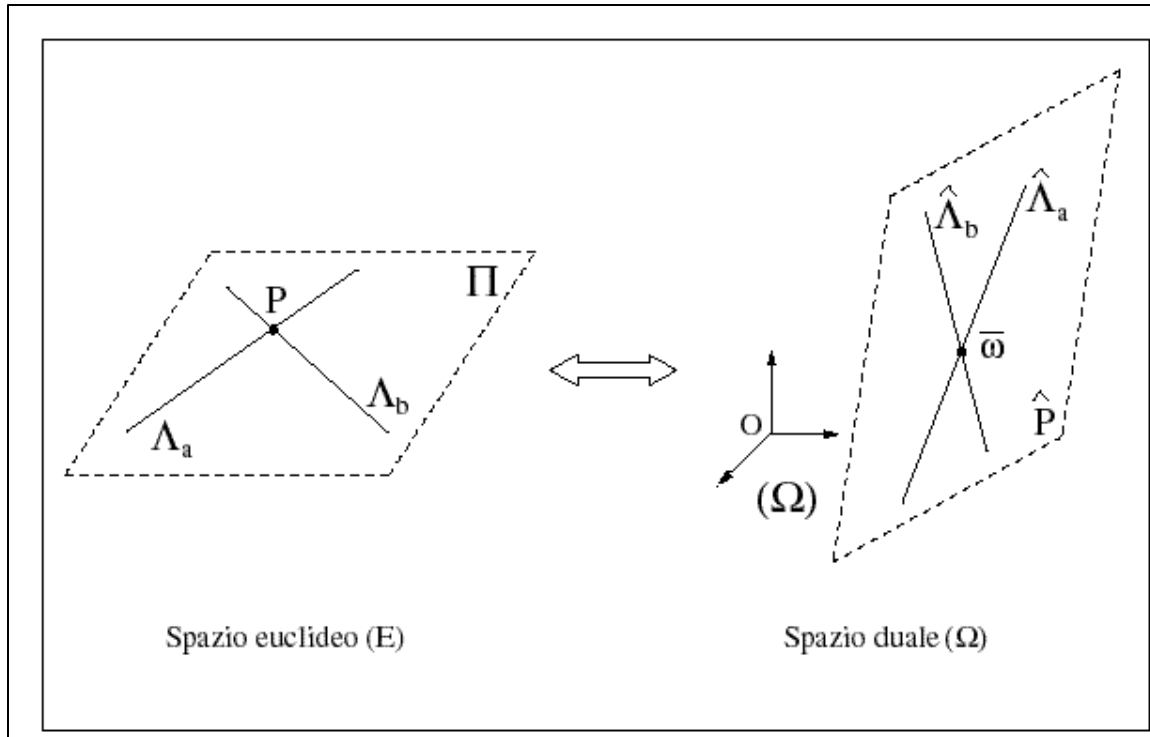


Figura 3.4: Proposizione 3. Due rette nello spazio Euclideo (E) che si intersecano in P e che giacciono sul piano Π , corrispondono a due rette nello spazio duale (Ω) che si intersecano in \hat{P} e che giacciono sul piano $\hat{\Pi}$.

Proposizione 2. Siano Π_a e Π_b due piani ortogonali in (E) espressi dai due vettori \bar{w}_a e \bar{w}_b . In tali ipotesi i vettori \bar{w}_a e \bar{w}_b nello spazio duale risultano ortogonali e pertanto $\langle \bar{w}_a, \bar{w}_b \rangle = 0$.

Prova. si segue la linea della prova della proposizione 1, ricordando che ora i due vettori normali unitari risultano ortogonali.

Proposizione 3. Si consideri due linee Λ_a e Λ_b in (E) che si intersecano nel punto P e si indichi con Π il piano che li contiene. In tali condizioni, nello spazio duale (Ω) le due linee $\hat{\Lambda}_a$ e $\hat{\Lambda}_b$ si intersecano nel punto \hat{P} le cui coordinate sono fornite dal vettore \bar{w} , rappresentativo di Π . La proposizione 3 e' esemplificata nella figura 3.4.

Prova. l'asserto segue immediatamente osservando che \bar{w} definisce il piano Π che contiene entrambe le linee nello spazio (E).

Prima di concludere il paragrafo e' utile richiamare alcune proprieta', di cui non si riporterà la dimostrazione, valide tanto nello spazio Euclideo quanto in quello duale.

Proprieta' 1. Si consideri una linea λ . Tale linea, fissato un sistema di riferimento di assi cartesiani, e' rappresentata, a meno di un fattore di scala, dal vettore tridimensionale $\bar{\mathbf{I}} = [\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$. Ebbene un punto P di coordinate $\bar{x} = [x \ y \ z]^T$ giace sulla linea λ se e solo se $\langle \bar{x}, \bar{\mathbf{I}} \rangle = 0$.

Proprieta' 2. Si consideri un piano Π . Tale piano, fissato un sistema di riferimento di assi cartesiani, e' rappresentato dal vettore tridimensionale $\bar{\mathbf{W}} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$. Ebbene un punto P di coordinate $\bar{x} = [x \ y \ z]^T$ giace sul un piano Π se e solo se $\langle \bar{x}, \bar{\mathbf{W}} \rangle = 1$. Tale proprieta', gia' esposta all'inizio del paragrafo 3.1, e' stata riformulata per maggiore chiarezza.

Proprieta' 3. Si considerino due punti P_1 e P_2 . Tali punti sono rappresentati, in un sistema di assi cartesiani, dai vettori $\bar{x}_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ e $\bar{x}_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$. Il vettore $\bar{\mathbf{I}}$, rappresentativo della linea passante per i punti P_1 e P_2 , si puo' scrivere come il prodotto vettoriale tra \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . In altri termini $\bar{\mathbf{I}} = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2$.

3.3 La geometria del metodo alla luce del formalismo duale

Nel precedente capitolo e' stato presentato il principio geometrico del metodo a luce debolmente strutturata ed in particolare nella figura 2.2 ne e' stata illustrata la configurazione geometrica nello spazio Euclideo (E). Sfruttando le proprieta' del formalismo duale, e' possibile individuarne la corrispondente configurazione duale nello spazio (Ω).

Si faccia riferimento alla figura 3.5. Nella parte sinistra compare una configurazione simile a quella di figura 2.2. Viene fissato il riferimento (O_c, X_c, Y_c, Z_c) solidale con la telecamera nello spazio Euclideo (E). I due piani Π_h e Π_v sono stati

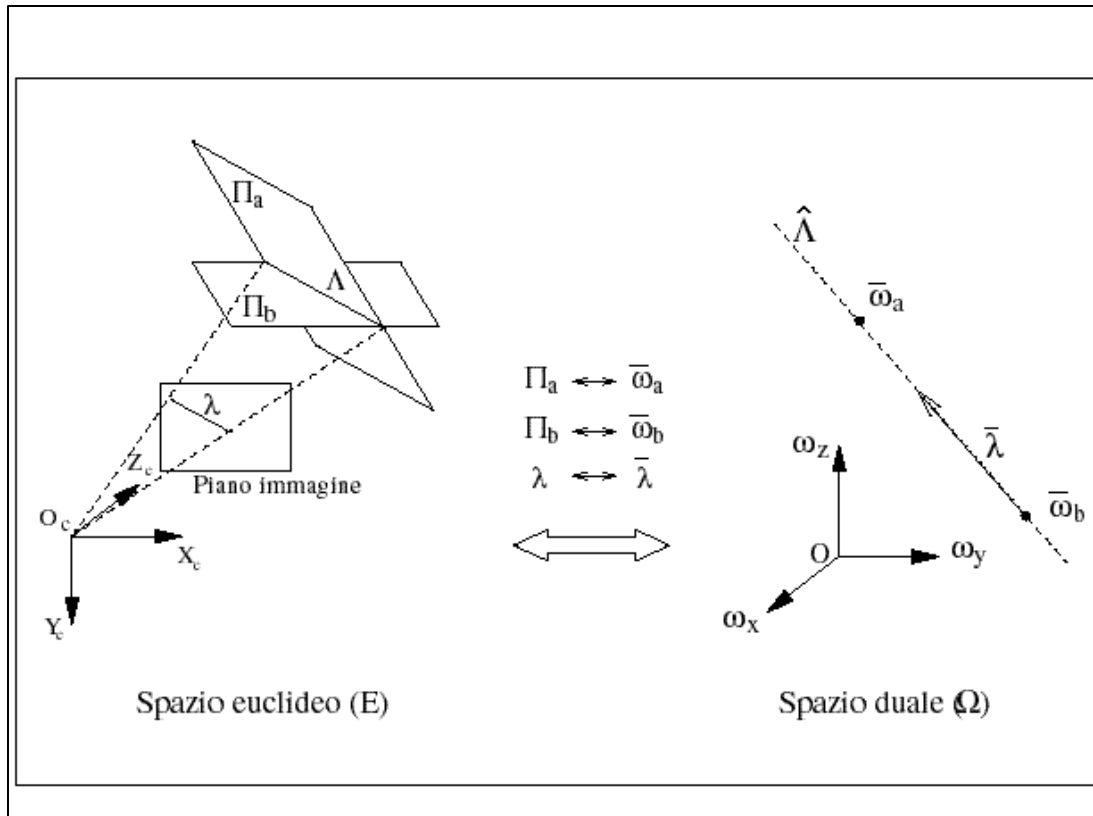


Figura 3.5: La configurazione geometrica del metodo vista nello spazio Euclideo (E) e duale (W). I piani Π_a e Π_b sono visti nello spazio duale come i punti $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$. Tali punti vengono individuati dai vettori $\bar{\omega}_a$ e $\bar{\omega}_b$, rappresentativi dei piani Π_a e Π_b . Il duale della linea Λ , intersezione tra i due piani Π_a e Π_b , e' quella linea che passa attraverso i punti $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$.

sostituiti dai piani Π_a e Π_b , non necessariamente ortogonali. La linea Λ , intersezione dei piani Π_a e Π_b , corrisponde alla linea λ sul piano immagine.

Il duale di tale struttura geometrica e' rappresentato nella parte destra della figura 3.5. Ai piani Π_a e Π_b in (E) corrispondono i punti $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$ in (W), individuati dai vettori $\bar{\omega}_a$ e $\bar{\omega}_b$. Alla linea Λ corrisponde la linea $\hat{\Lambda}$ passante per i punti $\hat{\Pi}_a$ e $\hat{\Pi}_b$. A partire da queste considerazioni e' possibile introdurre la seguente proposizione:

Proposizione 4. Con riferimento alla configurazione geometrica illustrata nella figura 3.5, sia \bar{l} il vettore rappresentativo della linea λ . In tali ipotesi il vettore \bar{l} risulta parallelo a $\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_b$. In altre parole il vettore $\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_b$ e' rappresentativo della linea λ .

Prova. Sia un punto P appartenente alla linea Λ e sia p la proiezione di P sulla linea immagine λ , appartenente al piano immagine. Si indichino con $\bar{X} = [X \ Y \ Z]^T$ e $\bar{x} = [x \ y \ z]^T$ le coordinate rispettivamente di P e p . Come si vedra' nel capitolo IV, \bar{X} e \bar{x} sono legati dalla relazione $\bar{X} = Z\bar{x}$. Poiche' P appartiene alla linea Λ , cio' significa che

P appartiene sia a Π_a che a Π_b . Pertanto, per la proprieta' 2 e sfruttando la relazione tra \bar{X} e \bar{x} , vale:

$$\begin{cases} \langle \bar{\mathbf{w}}_a, \bar{X} \rangle = 1 \\ \langle \bar{\mathbf{w}}_b, \bar{X} \rangle = 1 \end{cases} \Rightarrow \langle \bar{\mathbf{w}}_a - \bar{\mathbf{w}}_b, \bar{x} \rangle = 0$$

Quindi per la proprieta' 1, la retta rappresentata dal vettore $\bar{\mathbf{w}}_a - \bar{\mathbf{w}}_b$ contiene il punto p rappresentato da \bar{x} . Dato che cio' vale per ogni p appartenente a λ , si puo' concludere che il vettore $\bar{\mathbf{w}}_a - \bar{\mathbf{w}}_b$ e' rappresentativo di λ e deve essere pertanto parallelo a $\bar{\mathbf{l}}$.

Le proprieta' e le proposizioni presentate forniscono gli strumenti necessari per proseguire in maniera compatta l'analisi interrotta nel precedente capitolo. Nei successivi paragrafi si procedera' con l'individuazione del piano ombra e con l'estrazione delle coordinate dei punti di lavoro attraverso la procedura di triangolazione.

3.4 Individuazione del piano ombra nota la posizione della sorgente luminosa

Uno dei risultati ottenuti nel precedente capitolo e' stato quello di determinare per ciascun istante di tempo le coordinate dei pixel \underline{x}_{top} e \underline{x}_{bot} (cfr. § 2.6). Si consideri per esempio un certo istante t_s . Essendo nota la posizione del piano immagine nel riferimento (O_c, X_c, Y_c, Z_c) , e' possibile individuare i vettori $\bar{x}_{top} = [x_t \ y_t \ z_t]$ e $\bar{x}_{bot} = [x_b \ y_b \ z_b]$ rappresentativi dei due pixel \underline{x}_{top} e \underline{x}_{bot} . Noti \bar{x}_{top} e \bar{x}_{bot} , il vettore associato alla retta di

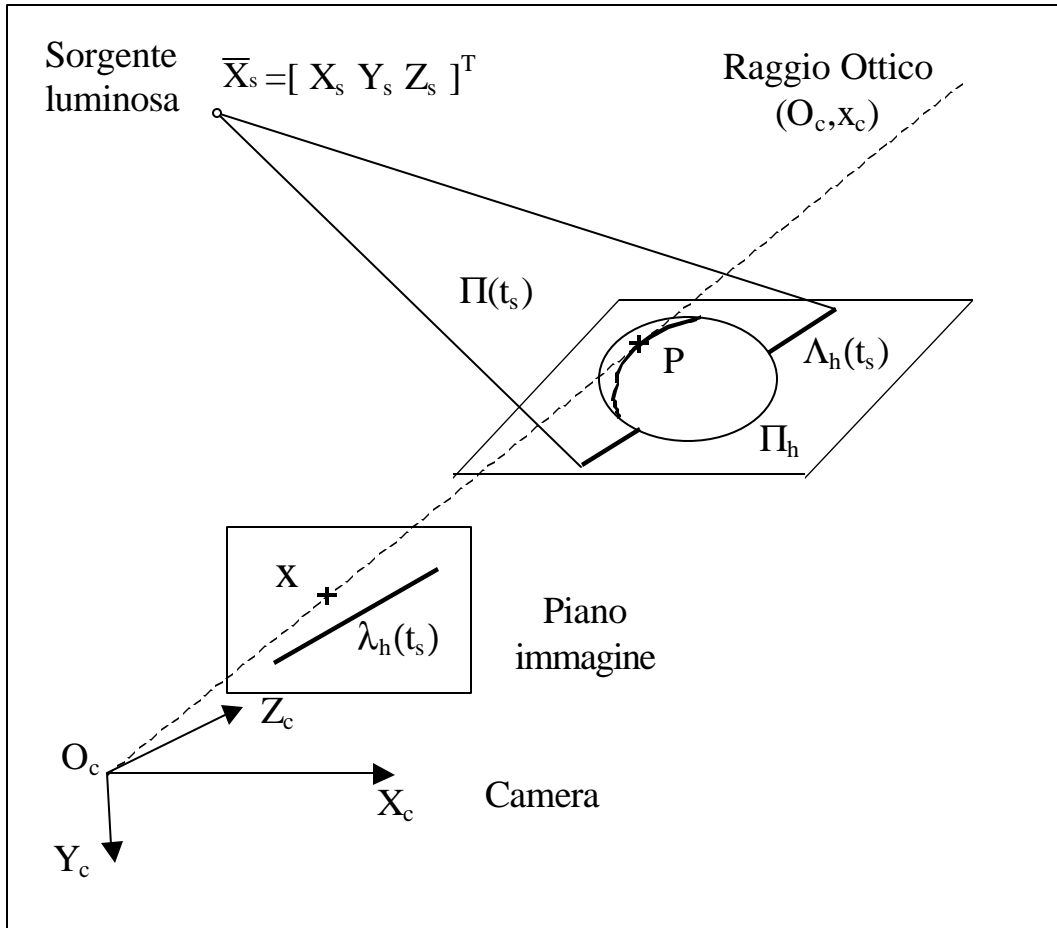


Figura 3.6: Configurazione geometrica del metodo assumendo nota la posizione della sorgente luminosa. In tal caso, ai fini dell'individuazione del piano ombra, non e' necessario introdurre il piano verticale e la relativa retta $\lambda_h(t)$.

terra $\lambda_h(t_s)$ e' calcolabile tramite la proprieta' 3:

$$\bar{I}_h(t_s) = \bar{X}_{top} \times \bar{X}_{bot}$$

Si assuma adesso di conoscere la posizione della sorgente luminosa S e si indichi con $\bar{X}_s = [X_s \ Y_s \ Z_s]^T$ il suo vettore rappresentativo. Come gia' accennato precedentemente, la conoscenza di \bar{X}_s permette di calcolare la posizione del piano ombra $\Pi(t_s)$ senza dover introdurre necessariamente il piano verticale Π_v e la relativa retta $\lambda_v(t_s)$. Nella figura 3.6 sono riportate alcune delle grandezze in gioco.

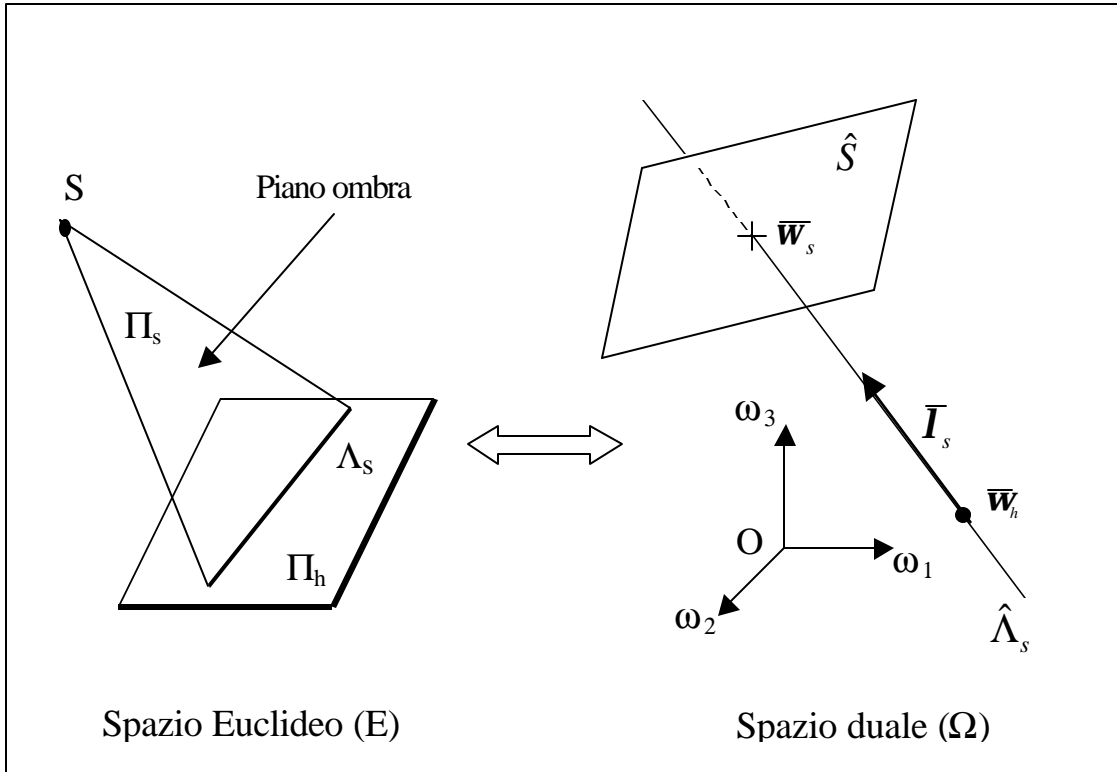


Figura 3.7: Il piano ombra visto nello spazio euclideo e in quello duale. Il piano ombra Π_s corrisponde al vettore \bar{w}_s nello spazio duale. Tale vettore puo' essere individuato dall'intersezione tra il duale di S e il duale di Λ_s .

Nella figura 3.7 viene illustrato graficamente come determinare il piano ombra introducendo il formalismo duale.

Sia $\bar{w}_s = \bar{w}_s(t_s)$ il vettore rappresentativo del piano ombra $\Pi_s = \Pi(t_s)$. Tale vettore individua il punto $\hat{\Pi}(t_s)$, duale di $\Pi(t_s)$, nello spazio duale (Ω). Si indichi con $\hat{\Lambda}_s = \hat{\Lambda}_s(t_s)$ il duale della linea di terra $\Lambda_s = \Lambda_h(t_s)$. Sia infine \bar{w}_h il vettore rappresentativo del piano Π_h . Tale vettore individua il punto $\hat{\Pi}_h$, duale del piano Π_h , nello spazio (Ω).

Dato che Λ_s giace sul piano Π_h , il punto duale $\hat{\Pi}_h$ (individuato da \bar{w}_h) appartiene alla retta $\hat{\Lambda}_s$. Inoltre dato che Λ_s giace sul piano Π_s , il punto duale $\hat{\Pi}(t_s)$ (individuato da \bar{w}_s) appartiene ancora alla retta $\hat{\Lambda}_s$. Di conseguenza, essendo verificate le ipotesi della proposizione 4, $\bar{I}_h(t_s)$ risulta parallelo al vettore $\bar{w}_s - \bar{w}_h$. Ne segue che il duale $\hat{\Pi}(t_s)$ del piano ombra e' calcolabile tramite la seguente relazione:

$$\bar{\mathbf{w}}_s = \bar{\mathbf{w}}_h + \alpha_s \bar{\mathbf{I}}_h(t_s) \quad (3.1)$$

dove α_s e' un coefficiente reale incognito, mentre $\bar{\mathbf{w}}_h$ e $\bar{\mathbf{I}}_h(t_s)$ sono noti.

Per determinare α_s basta imporre il vincolo che il punto luce S appartiene al piano ombra. Cio' equivale ad imporre che $\hat{\Pi}(t_s)$ appartiene al piano duale \hat{S} . Pertanto, ricordando la proprieta' 2, vale la seguente implicazione:

$$S \in \Pi_s \Leftrightarrow \langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{\mathbf{X}}_s \rangle = 1$$

Applicando l'operatore di prodotto scalare di $\bar{\mathbf{X}}_s$ ad ambo i membri della (3.1), si perviene alla seguente espressione per α_s :

$$\alpha_s = \frac{1 - \langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{X}}_s \rangle}{\langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{X}}_s \rangle} \quad (3.2)$$

con la quale e' possibile individuare univocamente il vettore $\bar{\mathbf{w}}_s$ rappresentativo del piano ombra e quindi trovare il piano ombra stesso.

Ovviamente la ricostruzione di $\bar{\mathbf{w}}_s$ e' lecita a patto che l'origine del sistema di riferimento O_c non appartenga al piano ombra. In tal caso non e' piu' possibile definire un vettore rappresentativo del piano ombra essendo la distanza del piano dall'origine nulla. Dal punto di vista geometrico e' relativamente facile da dimostrare che se il piano ombra contiene O_c significa che anche la proiezione $\bar{\mathbf{I}}_s$ della retta $\hat{\Lambda}_s$ sul piano immagine conterra' la proiezione $\bar{\mathbf{x}}_s$ del punto luce $\bar{\mathbf{X}}_s$ sul piano immagine. Dato che, come gia' mensionato precedentemente e come si vedra' meglio nel capitolo sulla calibrazione, $\bar{\mathbf{x}}_s$ e $\bar{\mathbf{X}}_s$ sono legati da un coefficiente di proporzionalita', si puo' scrivere:

$$\langle \bar{\mathbf{I}}_s, \bar{\mathbf{X}}_s \rangle = 0$$

da cui, per la (3.2), α_s e quindi $\|\bar{\mathbf{w}}_s\|$ vanno all'infinito. In tali condizioni non si puo' proseguire con la successiva fase di triangolazione e il pixel di lavoro non puo' essere

scandito. Per questo motivo il piano ombra che contiene O_c viene detto *piano proibito*. Nei casi reali il piano proibito si ha quando l'operatore proietta un'ombra passante per l'obbiettivo della telecamera che viene scelto come centro del sistema di riferimento. Risultati sperimentali dimostrano la stima del piano d'ombra e' cattiva anche nelle zone adiacenti il piano proibito.

3.5 Individuazione del piano ombra senza conoscere la posizione della sorgente luminosa

Se non si conosce la posizione del punto luce \bar{X}_s , il principio che sta dietro la ricostruzione del piano ombra rimane essenzialmente lo stesso rispetto al caso precedente. Tuttavia occorre introdurre nuovamente il piano verticale, la linea $\Lambda_v(t_s)$ e la sua proiezione $\lambda_v(t_s)$ sul piano immagine. L'analisi fatta nel capitolo II per trovare $\lambda_h(t_s)$ si puo' ripetere in maniera perfettamente identica nel caso della retta $\lambda_v(t_s)$ sul piano verticale. Il vettore $\bar{\mathbf{I}}_v(t_s)$, rappresentativo della retta $\lambda_v(t_s)$, si assume pertanto noto. Nella figura 3.8 compare la configurazione geometrica con piano verticale e orizzontale e la corrispondente rappresentazione nello spazio duale.

Si indichi con Λ_i l'intersezione tra i piani Π_h e Π_v . La proiezione di Λ_i sul piano immagine da' luogo alla linea λ_i . Tale linea e' rappresentata dal vettore $\bar{\mathbf{I}}_i$ le cui coordinate si assumono note dalla procedura di calibrazione. Siano $\bar{\mathbf{w}}_h$ e $\bar{\mathbf{w}}_v$ i vettori rappresentativi dei piani Π_h e Π_v . Nello spazio duale $\bar{\mathbf{w}}_h$ e $\bar{\mathbf{w}}_v$ individuano i punti $\hat{\Pi}_v$ e $\hat{\Pi}_h$.

Si indichino con $\bar{\mathbf{I}}_h = \bar{\mathbf{I}}_h(t_s)$, $\bar{\mathbf{I}}_v = \bar{\mathbf{I}}_v(t_s)$ e $\bar{\mathbf{w}}_s = \bar{\mathbf{w}}_s(t_s)$ i vettori rappresentativi delle linee $\lambda_h(t_s)$, $\lambda_v(t_s)$ e del piano ombra $\Pi(t_s)$. Poiche' $\lambda_h(t_s)$ e' la proiezione sul piano immagine della linea $\Lambda_h = \Lambda_h(t_s)$, intersezione tra Π_h e $\Pi(t_s)$, per la proposizione 4 il vettore $(\bar{\mathbf{w}}_s - \bar{\mathbf{w}}_h)$, nello spazio duale, sara' parallelo al vettore $\bar{\mathbf{I}}_h$. Di conseguenza il duale del piano ombra (e cioe' il punto $\hat{\Pi}(t_s)$ individuato da $\bar{\mathbf{w}}_s$) dovra' giacere sulla retta passante per $\hat{\Pi}_h$ (individuato da $\bar{\mathbf{w}}_h$), la cui direzione e' determinata da $\bar{\mathbf{I}}_h$. Tale retta

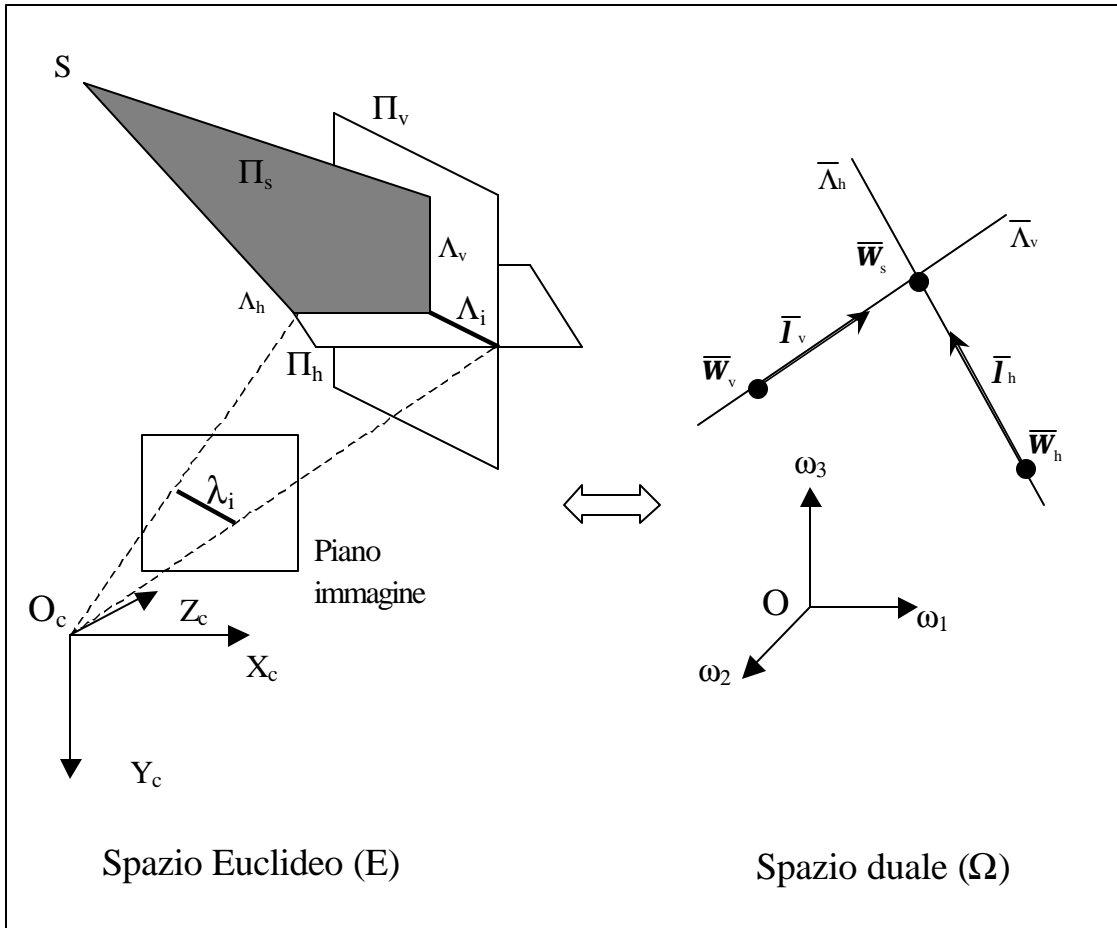


Figura 3.8: Grandezze geometriche in gioco nel caso in cui non e' nota la posizione della sorgente luminosa. In tal caso occorre introdurre nuovamente il piano Π_v e la relativa retta $\lambda_v(t_s)$. Nella parte destra della figura compiono le grandezze duali.

e' essenzialmente $\hat{\Lambda}_h$, duale di $\lambda_h(t_s)$. Analogamente poiche' $\lambda_v(t_s)$ e' la proiezione sul piano immagine della linea $\Lambda_v = \Lambda_v(t_s)$, intersezione tra Π_v e $\Pi(t_s)$, per la proposizione 4 il vettore $(\bar{w}_s - \bar{w}_v)$, nello spazio duale, sara' parallelo al vettore \bar{I}_v . Pertanto $\hat{\Pi}(t_s)$ dovra' giacere sulla retta passante per $\hat{\Pi}_v$ (individuato da \bar{w}_v), la cui direzione e' determinata da \bar{I}_v . Tale retta e' essenzialmente $\hat{\Lambda}_v$, duale di $\lambda_v(t_s)$. Di conseguenza nello spazio duale, $\hat{\Pi}(t_s)$ e' il punto di intersezione tra $\hat{\Lambda}_h$ e $\hat{\Lambda}_v$. Per trovare le coordinate di $\hat{\Pi}(t_s)$ (espresse dal vettore \bar{w}_s) si sfrutta la seguente eguaglianza:

$$\bar{w}_s = \bar{w}_h + \mathbf{a}_t \bar{I}_h(t_s) = \bar{w}_v + \mathbf{a}_t \bar{I}_v(t_s) \quad (3.3)$$

dove α_h e α_v sono dei coefficienti scalari. Tale espressione, ricavata sull'orma della (3.1), fornisce 3 equazioni scalari in due incognite (α_h e α_v) rendendo il problema risolvibile.

In presenza del rumore l'analisi si complica, non essendo piu' vero che le due rette $\hat{\Lambda}_h$ e $\hat{\Lambda}_v$ si devono necessariamente intersecare in un punto nello spazio (Ω). Cio' equivale a dire che le tre linee $\lambda_h(t_s)$, $\lambda_v(t_s)$ e λ_i non si intersecano in un unico punto nel piano immagine oppure che i tre vettori $\bar{\mathbf{I}}_h$, $\bar{\mathbf{I}}_v$ e $\bar{\mathbf{I}}_i$ non sono complanari. Tuttavia e' ancora possibile identificare $\hat{\Pi}(t_s)$ come quel punto nello spazio che minimizza la somma dei quadrati delle sue distanze dalle due rette $\hat{\Lambda}_h$ e $\hat{\Lambda}_v$. E' possibile dimostare che il vettore $\bar{\mathbf{w}}_s$, rappresentante $\hat{\Pi}(t_s)$ nello spazio duale, si puo' esprimere nella seguente maniera:

$$\bar{\mathbf{w}}_s = \frac{\bar{\mathbf{w}}_{s1} + \bar{\mathbf{w}}_{s2}}{2}$$

con:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{w}}_{s1} = \bar{\mathbf{w}}_h + \mathbf{a} \bar{\mathbf{I}}_h(t_s) \\ \bar{\mathbf{w}}_{s2} = \bar{\mathbf{w}}_v + \mathbf{a} \bar{\mathbf{I}}_v(t_s) \end{cases} \quad (3.4)$$

dove α_h e α_v sono esprimibili come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{I}}_h \rangle & -\langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{I}}_v \rangle \\ -\langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{I}}_v \rangle & \langle \bar{\mathbf{I}}_v, \bar{\mathbf{I}}_v \rangle \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{w}}_v - \bar{\mathbf{w}}_h \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{I}}_v, \bar{\mathbf{w}}_h - \bar{\mathbf{w}}_v \rangle \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Si noti che $\bar{\mathbf{w}}_{s1}$ e $\bar{\mathbf{w}}_{s2}$ possono essere viste come le proiezioni ortogonali di $\bar{\mathbf{w}}_s$ sulle rette $\hat{\Lambda}_h$ e $\hat{\Lambda}_v$ rispettivamente.

Sia conoscendo la posizione della sorgente luminosa che ignorando tale informazione e' stato possibile ricavare il vettore $\bar{\mathbf{w}}_s$ che individua univocamente il piano ombra nello spazio euclideo. Il passo conclusivo e' quello di trovare le coordinate spaziali del punto di lavoro tramite l'operazione di triangolazione.

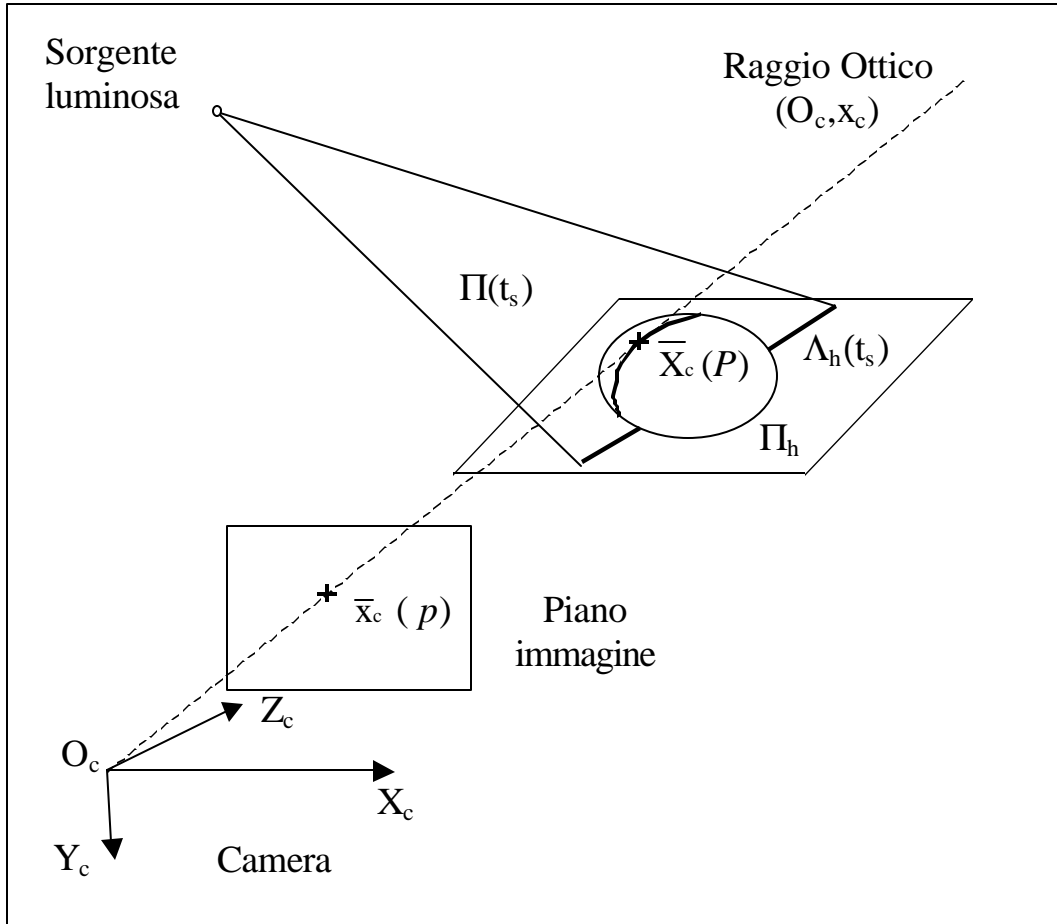


Figura 3.9: Procedura di triangolazione. Intersecando il raggio ottico (O_c, x_c) con il piano ombra $\Pi(t_s)$ e' possibile individuare il punto P nello scenario.

3.6 Triangolazione

Supponendo, come al solito, di fissare il sistema di riferimento (O_c, X_c, Y_c, Z_c) solidale con la telecamera, si indichi con $\bar{X}_c = [X_c \ Y_c \ Z_c]^T$ il vettore che individua il punto di lavoro P e con $\bar{x}_c = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ il vettore che ne individua la proiezione p sul piano immagine. Il vettore \bar{X}_c e' l'incognita mentre \bar{x}_c e' noto, essendo note le coordinate in pixel di p sul piano immagine e la posizione del piano immagine stesso nel riferimento (O_c, X_c, Y_c, Z_c) (si confronti il capitolo sulla calibrazione). Nella figura 3.9 sono visualizzate le grandezze in questione.

L'operazione di triangolazione, come già accennato nel paragrafo 2.2, consiste nell'intersecare il raggio ottico (O_c, \bar{x}_c) con il piano d'ombra $\Pi(t)$, al tempo d'ombra t_s (istante di tempo in cui l'ombra passa per il pixel \bar{x}_c). Il risultato di tale intersezione fornisce le coordinate del punto P . La notazione introdotta consente di ricavare agevolmente un'espressione per \bar{X}_c .

Poiché P appartiene al piano ombra $\Pi(t_s)$, per la proprietà 2, vale:

$$\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{X}_c \rangle = 1$$

Ricordando che $\bar{X}_c = Z_c \bar{x}_c$ (cfr. capitolo sulla calibrazione) la precedente espressione diventa:

$$\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{x}_c \rangle = \frac{1}{Z_c} \Leftrightarrow Z_c = \frac{1}{\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{x}_c \rangle}$$

Per cui :

$$\bar{X}_c = Z_c \bar{x}_c = \frac{\bar{x}_c}{\langle \bar{\mathbf{w}}_s, \bar{x}_c \rangle} \quad (3.6)$$

La (3.6) fornisce quanto si stava cercando.

Il vettore \bar{X}_c fornisce le coordinate di P nel riferimento della telecamera. Tuttavia non è difficile valutare l'altezza del punto P dal piano di terra Π_h , facendo ancora uso della geometria duale.

Con riferimento alla figura 3.10, sia \bar{X}_n il vettore che individua la proiezione di P sul piano di terra Π_h e sia \bar{X}_h il vettore differenza $\bar{X}_c - \bar{X}_n$. Per costruzione \bar{X}_h risulterà parallelo al vettore normale unitario \bar{n}_h del piano Π_h . Essendo $\bar{\mathbf{w}}_h$ il vettore rappresentativo del piano Π_h , esso si può esprimere come:

$$\bar{\mathbf{w}}_h = \frac{\bar{n}_h}{d_h}$$

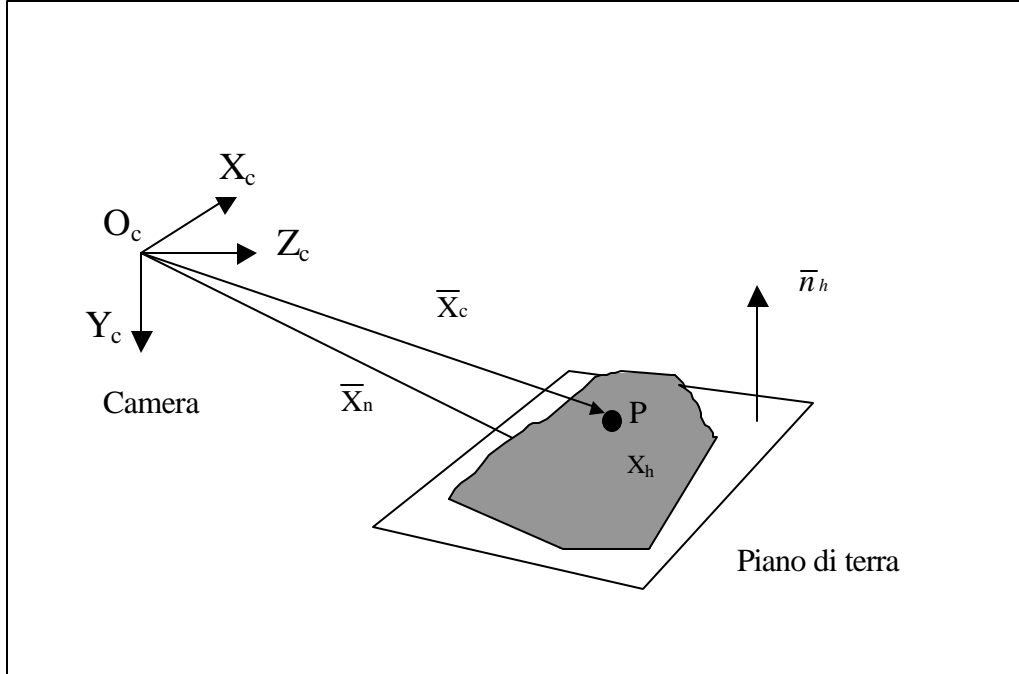


Figura 3.10: Rappresentazione vettoriale legata al punto di lavoro. Facendo uso del formalismo dello spazio duale si riesce a ricavare agevolmente l'altezza del punto di lavoro dal piano di terra.

con d_h pari alla distanza del piano di terra dal centro del sistema di riferimento O_c . A questo punto si prenda in esame il prodotto scalare tra il vettore rappresentativo del piano di terra e il vettore che individua il punto P nello scenario. Tale quantità si può riscrivere come:

$$\langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{X}}_c \rangle = \left\langle \frac{\bar{n}_h}{d_h}, \bar{\mathbf{X}}_n + \bar{\mathbf{X}}_h \right\rangle = \langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{X}}_n \rangle + \left\langle \frac{\bar{n}_h}{d_h}, \bar{\mathbf{X}}_h \right\rangle$$

Tenendo conto che il vettore $\bar{\mathbf{X}}_n$ è rappresentativo di un punto che giace sul piano di terra e che i vettori \bar{n}_h e $\bar{\mathbf{X}}_n$ sono paralleli, il precedente prodotto scalare diventa:

$$\langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{X}}_c \rangle = 1 + \frac{Z_o}{d_h} \Leftrightarrow Z_o = d_h (1 - \langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{X}}_c \rangle)$$

dove Z_o è l'altezza del punto di lavoro dal piano di terra.

Poiche' il punto P appartiene al piano ombra per definizione (il che implica che $\langle \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{X}}_c \rangle = 1$) e poiche' $\bar{\mathbf{X}}_c = Z_c \bar{\mathbf{x}}_c$, l'altezza Z_o si puo' anche esprimere come:

$$Z_o = d_h Z_c \langle \bar{\mathbf{w}}_k - \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{x}}_c \rangle$$

che, in assenza di rumore e ricordando l'equazione (3.3), diventa:

$$Z_o = \alpha_h d_h Z_c \langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{x}}_c \rangle \quad (3.7)$$

Di conseguenza se il pixel $\bar{\mathbf{x}}_c$ appartiene alla linea di terra immagine λ_h :

$$\langle \bar{\mathbf{I}}_h, \bar{\mathbf{x}}_c \rangle = 0 \Rightarrow Z_o = 0$$

Questo risultato, evidentemente intuitivo, e' messo in evidenza in modo semplice ed elegante dal formalismo dello spazio duale.

3.7 Sorgente di luce all'infinito

Un caso interessante e' quello della sorgente di luce all'infinito. Cio' suggerisce, per esempio, di identificare il punto luce con il sole, consentendo di effettuare scansioni anche in ambienti esterni. Se si introduce il piano verticale, non e' necessaria alcuna conoscenza sulla posizione del sole. Pertanto e' possibile pensare ad un approccio leggermente differente. Si proietta sullo scenario un'ombra usando una bacchetta o un asta la cui posizione e' fissata. L'ombra si sposterà mano mano che il sole si muove, scandendo così tutta la superficie di lavoro. L'operazione sarà sicuramente molto lenta, ma si potrebbe estendere a oggetti molto difficili da scandire con i sistemi tradizionali.

Se invece la posizione del punto luce si assume nota e fissata, si puo' fare a meno del piano verticale. In tal caso ovviamente la scansione deve essere effettuata in tempi



Figura 3.11: Scansione usando il sole come sorgente luminosa. Assumendo nota e fissata la posizione del punto luce (il sole), la scansione viene effettuata facendo scorrere sull'automobile l'ombra generata da un'asta.

brevi, prima che il sole si sposti sensibilmente dalla posizione di partenza. Nella figura 3.11 e' mostrato un esempio di come si possa facilmente scandire un oggetto voluminoso, quale un'automobile, sfruttando come sorgente luminosa il sole.

L'ipotesi di punto luce all'infinito richiede di dover leggermente modificare le equazioni ricavate nel paragrafo 3.4 per la valutazione del piano ombra. Ora il vettore \bar{X}_s , che individua il punto S all'infinito, ha norma infinita. Pertanto il piano \hat{S} (duale del punto S) passa per l'origine del sistema di riferimento $(O, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ nello spazio duale (Ω) ed e' dato appunto dal vettore :

$$\bar{X}_s = \frac{\bar{n}_s}{d_s}$$

dove \bar{n}_s e' il vettore normale individuante la direzione del punto luce nel sistema di riferimento della telecamera e d_s e' la distanza dall'origine O ($d_s = 0$).

Tenendo conto di cio', le implicazioni che hanno portato alla (3.2) diventano:

$$S \in \Pi_s \Leftrightarrow \langle \bar{w}_s, \bar{X}_s \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle \bar{w}_s, \bar{n}_s \rangle = 0$$

da cui, applicando l'operatore di prodotto scalare di \bar{n}_s ad ambo i membri della (3.1), si perviene alla nuova espressione per α_s :

$$\alpha_s = - \frac{\langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{n}_s \rangle}{\langle \bar{\mathbf{I}}_s, \bar{n}_s \rangle} \quad (3.8)$$

Quindi assumendo di conoscere la direzione del vettore normale \bar{n}_s dalla procedura di calibrazione, la (3.8) consente di calcolare il coefficiente α_s così come il vettore $\bar{\mathbf{w}}_s$ (tramite l'equazione (3.1)).

3.8 Piano orizzontale e verticale nello spazio duale

Nei precedenti paragrafi è stato assunto che le posizioni del piano orizzontale Π_h e verticale Π_v , nel sistema di riferimento solidale con la telecamera, fossero note. Dalla procedura di calibrazione si possono effettivamente ricavare tutte queste informazioni. Tuttavia si vuole far vedere che introducendo ancora il formalismo dello spazio duale è sufficiente conoscere solamente la posizione del piano orizzontale.

Si prenda come riferimento la figura 3.12. Essendo i vettori $\bar{\mathbf{w}}_v$ e $\bar{\mathbf{w}}_h$ rappresentativi dei piani Π_h e Π_v rispettivamente, questi individueranno nello spazio duale i punti $\hat{\Pi}_h$ e $\hat{\Pi}_v$. La linea Λ_i , intersezione tra Π_h e Π_v , avrà come duale la linea $\hat{\Lambda}_i$ rappresentata in (Ω) dal vettore $\bar{\Lambda}_i$. Infine la proiezione di Λ_i sul piano immagine è rappresentata dal vettore $\bar{\mathbf{I}}_i$ (cfr. figura 3.8).

Poiché Λ_i è in comune al piano orizzontale e verticale, ciò corrisponde, nello spazio duale, a dire che la linea $\hat{\Lambda}_i$ deve passare per i punti $\hat{\Pi}_h$ e $\hat{\Pi}_v$ oppure, equivalentemente, che il vettore $\bar{\mathbf{w}}_v - \bar{\mathbf{w}}_h$ deve essere parallelo a $\bar{\mathbf{I}}_i$ (sono soddisfatte le ipotesi della proposizione 4). Pertanto deve esistere uno scalare α tale che $\bar{\mathbf{w}}_v = \bar{\mathbf{w}}_h + \alpha \bar{\mathbf{I}}_i$.

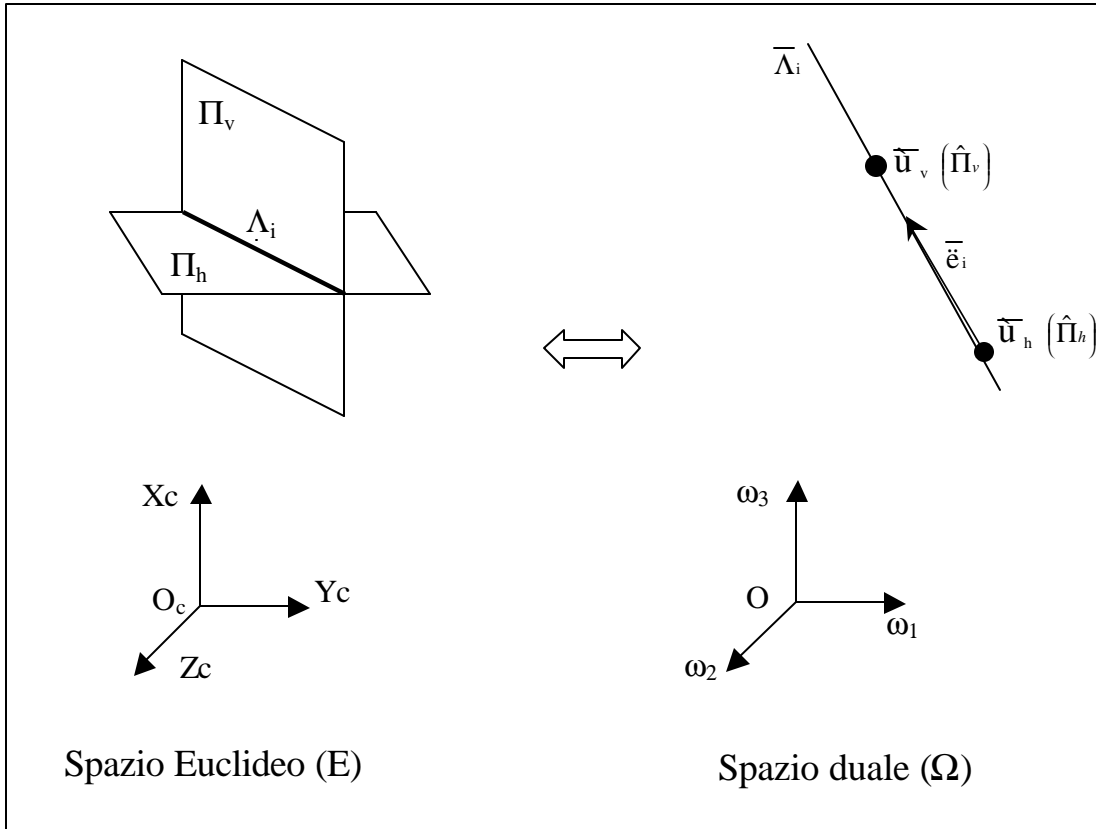


Figura 3.12: Metodo per trovare la posizione del piano verticale conoscendo quella del piano orizzontale. Sfruttando le rappresentazioni duali del piano verticale e orizzontale e' possibile trovare una relazione tra i vettori rappresentativi dei due piani.

Essendo i due piani Π_h e Π_v per costruzione ortogonali, per la proposizione 2 risulta che $\langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{w}}_v \rangle = 0$. Cio' porta alla seguente espressione per $\bar{\mathbf{w}}_v$:

$$\bar{\mathbf{w}}_v = \bar{\mathbf{w}}_h - \frac{\langle \bar{\mathbf{w}}_h, \bar{\mathbf{w}}_h \rangle}{\langle \bar{\mathbf{I}}_i, \bar{\mathbf{w}}_h \rangle} \bar{\mathbf{I}}_i$$

Dove $\bar{\mathbf{w}}_h$ e' noto dalla calibrazione e $\bar{\mathbf{I}}_i$ lo si puo' estrarre dall'immagine acquisita.

